Optimierung in der Finanzmathematik SS 2018
3. Übungsblatt

14. (Ein Standortproblem)

a) Betrachten Sie den Fall einer Firma, die Schecks aus n, $n \in \mathbb{N}$ Geschäftsfilialen bekommt. Die Zeitspanne zwischen der Bezahlung eines Schecks und dessen Verrechnung hängt von der Paarung (Geschäftsfiliale,Verrechnungsstelle) ab. Selbst wenn diese Zeitspanne nur wenige Tage beträgt, so entsteht bei großen Geschäftsvolumina ein zinssatz- oder reinvestitionsbedingter Verlust für die Firma. Wenn zB. von der Geschäftsfiliale A Schecks in Wert von B in die Verrechnungsstelle C zur Verrechnung geschickt werden und die Zeitspanne zwischen erfolgtem Geschäft und Verrechnung zwei Tage beträgt, dann schreibt die Firma einen Verlust von pB, wobei p der tägliche Zinssatz oder die Reinvestitionsrate ist. Die Firma erwägt daher die Eröffnung von Verrechnungsstellen an manchen Geschäftsfilialen (Engl. *lockboxes*), sodass die obenen beschriebenen Verluste minimiert werden. Jede Geschäftsfiliale wird nun genau einer Verrechnungsstelle zugeordnet, die alle Schecks aus dieser Geschäftsfiliale bearbeitet. Die zinsbedingten Verluste der Firma bei Zuordnung einer Geschäftsfiliale i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, zu einer Verrechnungsstelle j, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, hängen somit von dem (täglichen) Durchschnittvolumen V_i der Schecks aus der Geschäftsfiliale i, der Zeitspanne T_{ij} zwischen Einzahlung eines Schecks in Filiale i und Verrechnung des Schecks in Rechnungsstelle j, und dem (täglichen) Zinsatz p. Weiters ist zu berücksichtigen, dass die Eröffnung einer Verrechnungsstelle in Geschäftsfiliale j, mit fixen Investitionskosten f_j einhergeht, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Es wird angenommen, dass die Volumina V_i, die Zeitspannen T_{ij} zwischen Einzahlung eines Schecks in Filiale i und Verrechnung des Schecks in Rechnungsstelle j für alle Paare $i, j = 1, 2, \ldots, n$ bekannt sind. Auch die Reinvestitionsrate p sei bekannt. Formulieren Sie dieses Problem als (gemischt)-ganzzahliges lineares Optimierungsproblem (GLOP).

(b) Betrachten Sie eine Variante des Problems in dem es keine fixen Eröffnungskosten für die Verrechnungstellen gibt, sondern nur Kosten für Zordnung der Geschäftsfilialen zu den Verrechnungsstellen: seien α_{ij} die Zuordnungskosten der Geschäftsfiliale i zur Verrechnungsstelle j, für alle Filialen i, $1 \leq i \leq n$, und für alle möglichen Verrechnungsstellen j, $1 \leq j \leq n$. Es wird angenommen, dass in den Koeffiezienten α_{ij} alle anderen Kosten eingepreist sind (zB. Zinssätze, Anzahl der zu bearbeitenden Checks in den Filialen, Sendezeiten u.s.w.). Es wird angenommen, dass genau q Verrechnungsstellen betrieben werden sollen, für ein gegebenes q mit $1 \leq q \leq n$. Formulieren Sie ein ganzzahliges lineares Optimierungsproblem (GLOP) um die optimalen zu betreibenden Verrechnungsstellen zu bestimmen, sodass die Gesamtkosten der Zuordnung jeder Geschäftsfiliale zu einer in Betrieb genommenen Verrechnungstelle minimiert werden.

(c) Geben Sie zwei Alternativen (i) und (ii) für die Fomulierung folgender Restriktion an: Die Geschäftsfilialen können Schecks nur zu betriebsbereiten Verrechnungsstellen senden. Alternative (i) verwendet n^2 Ungleichungen zur Modellierung der obigen Restriktion, während ALternative (ii) n Ungleichungen dazu verwendet.

(d) Lösen und vergleichen sie die LP-Relaxationen der zwei oben genannten Formulierungen des Problems aus (b) für $q = 2$ und

$$A = (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 8 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 0 & 1 & 7 \\ 8 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) Betrachten Sie das GLOP, das der Alternative (i) enstpricht (siehe Punkt (c)), mit dem Input aus Punkt (d). Relaxieren Sie mit Hilfe von Lagrange Multiplikatoren $u \in \mathbb{R}^5$ jene Ungleichungen, die der Zuordnung einer Geschäftsfiliale an genau einer Verrechnungsstelle entsprechen.

Sei $L(u)$ der optimale Zielfunktionswert dieser Lagrange Relaxation mit einem festen Satz von Lagrange Multiplikatoren $u \in \mathbb{R}^5$. Betrachten Sie $u^{(1)} = (1,1,1,1,1)^t$ und $u^{(2)} = (6,5,1,1,1)^t$ und berechnen Sie $L\Big(u^{(1)}\Big)$, $L\Big(u^{(2)}\Big)$ mit Hilfe eines Greedy Ansatzes (siehe die in der Vorlesung besprochene Heuristik zur Konstruktion eines Index Fonds).

15. Betrachten Sie das untenstehende ganzzahlige lineare Problem (ILP)

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + x_2 \\ \text{udNb} & \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 19 \\ & x_1\,, x_2 \geq 0 \\ & x_1\,, x_2 \text{ ganzzahlig} \end{array}$$

Lösen Sie dieses Problem mit Hilfe eines *Branch and Bound* Ansatzes unter Verwendung von

(a) *simple Branching* vs. *strong Branching* für die Auswahl des Variable x_j an der verzweigt wird.

(b) *first in first out* vs. *last in first out* für die Auswahl des zu untersuchenden Knoten des Branch and Bound Baums.

Vergleichen die Größen der resultierenden *Branch and Bound* Bäume.

16. Betrachten Sie folgendes Budgetierungsproblem. Eine Managerin verfügt über 4 Millionen Euro, die sie in 3 unterschiedlichen Projekten in drei unterschiedlichen Regionen investieren kann. Für jede Region i, $i \in \{1,2,3\}$, sind die in Region i durchführbaren Projekte sowie die dazugehörigen Kostenkoeffizienten $c^{(i)} \in \mathbb{R}^3$ und Nutzenkoeffizienten $p^{(i)} \in \mathbb{R}^3$ bekannt. Diese Daten (in Millionen Euro) werden in der untenstehenden Tabelle zusammengefasst.

	Region 1		Region 2		Region 3	
Projekt	$c^{(1)}$	$p^{(1)}$	$c^{(2)}$	$p^{(2)}$	$c^{(3)}$	$p^{(3)}$
1	1	2	1	3	1	2
2	2	4	3	9	2	5
3	4	10	-	-	-	-

Die Managerin möchte höchstens 1 Projekt pro Region finanzeren. Ihr Ziel ist die Bestimmung eines Investitionsplan (d.h. die Entscheidung welches Projekt in welcher Regionen finanziert werden soll), sodass der Gesamtnutzen maximiert wird.

(a) Formulieren Sie dieses Problem als dynamisches Optimierungsproblem mit 4 Stufen i, $i \in \{1,2,3,4\}$. Die ersten 3 Stufen entsprechen den sequentiellen Entscheidungen über die Investition in der jeweiligen Region i, $i \in \{1,2,3\}$. Die letzte Stufe $i = 4$ ist ein Artefakt zur Modellierung des Endzustandes. In dieser Stufe wird keine Entscheidung getroffen. Der Zustand s_i in Stufe i entspricht dem noch vorhandenen Kapital (bevor in Stufe i ggf. eine Entscheidung gefallen ist). Es gilt also $s_1 = 4$. Geben Sie für jede Stufe $i \in \{1,2,3\}$ und jeden in dieser Stufe möglichen Zustand j die Menge der zulassigen Entscheidungen $A(i,j)$. Geben Sie weiters die Kosten $c_i(j,a)$ sowie die Übergangsfunktion $f_i(j,a)$, wobei $i \in \{1,2,3\}$, j ein zulässiger Zustand in Stufe i ist und $a \in A(i,j)$.

Alle oben genannten Größen können auch mit Hilfe eines gerichteten Graphen visualisiert werden. Die Knoten des Graphen entsprechen Paaren (i,j), bestehend aus einer Stufe i und einem in Stufe i zulässigen Zustand j. Die Kanten des Graphen entsprechen den Übergängen von einer Stufe zur anderen, die durch zulässige Entscheidungen bewirkt werden.

(b) Sei $v(i,j)$ der maximale Gesamtnutzen, der mit zulässigen Entscheidungen in den Stufen i,$i+1$,..., 3, ausgehend vom zulässigen Zustand j in Stufe i, erzielt werden kannn. Geben Sie die Bellman'sche Gleichung zur rekursiven Berechnung von $v(1,4)$ an.

(c) Wenden Sie die Bellman'sche Gleichung zur Bestimmung eines optimalen Investitionsplans mit Hilfe einer Rückwärtsrechnung unter Berücksichtigung der sogenannten Randbedingungen $v(3,0) = 0$, $v(3,1) = 2$, $v(3,2) = 5$, $v(3,3) = 5$ und $v(3,4) = 5$. (Warum gelten diese Randbedingungen?)

17. Eine Amerikanische Call Option (ACO) mit Ausübungspreis c und Ablaufdatum T, $T \in \mathbb{N}$, über einen bestimmten Basiswert XYZ ist ein Kontrakt, dessen Käufer das Recht aber nicht die Pflicht besitzt, den Basiswert XYZ an jedem beliebigen Tag im Zeitinterval $[0,T]$ um den Preis c zu kaufen. Betrachten Sie eine ACO unter der Annahme, dass die Preisentwicklung des Basiswertes XYZ der Gleichung $S_k = S_{k-1} + X_k$ genügt, wobei S_k der Preis von XYZ am Tag k ist und X_k, $k \in \{0,1,\ldots,T\}$, gleichverteilte, unabhängige Zufallsvariablen sind. Einfachheitshalber werden wir X_k, $k \in \{0,1,\ldots,T\}$, durch eine Zufallsvariable X ersetzen, deren Verteilung mit der geminsamen Verteilung aller X_k, $k \in \{0,1,\ldots,T\}$, übereinstimmt. Das Ziel ist eine Strategie für die Ausübung der ACO zu bestimmen, die den erwarteten Nutzen maximiert.

Wir modellieren dieses Problem als (kontinuierliches) stochastisches dynamisches Optimierungsproblem mit Stufen i, $i \in \{-1,0,1,\ldots,T\}$ wie folgt. Für $i \geq 0$ entspricht i der Anzahl der verbliebenen Tage bis zum Ablaufdatum. Die Stufe $i = -1$ entspricht dem Ende des Zeithorizonts, in dieser Stufe wird keine Entscheidung getroffen. Der Zustand s_i in Stufe i entspricht dem Preis S_{T-i} des Basiswertes XYZ i Tage vor dem Ablaufdatum. (Beachten Sie, dass die Menge der Zulässigen Zustände in diesem Fall ein Kontinuum ist.) Der Zusand in Stufe -1 is irrelevant. Für jedes Paar (i, S_{T-i}) mit $i \in \{0,1,\ldots,T\}$ gibt es nur zwei zulässige Entscheidungen, „Ausübung“ und „Nicht-Ausübung“.

Die Entscheidung „Ausübung“ führt zur Stufe -1. Die Entscheidung „Nicht-Ausübung“ in Stufe i mit Zustand S_{T-i} führt zur Stufe $i-1$ mit Zustand $S_{T-i+1} = S_{T-i} + X$. Der unmittelbare Nutzen einer „Ausübung “ in Stufe i ist $\max\{S_{T-i} - c, 0\}$ und der unmittelbare Nutzen einer „Nicht-Ausübung “ in Stufe i ist 0. Sei $v(i,S)$ der maximale erwartete Nutzen über alle Entscheidungen, die in den Stufen i, $i-1$, …, 0, getroffen werden, falls der Anfangszustand S in Stufe i ist.

(a) Geben Sie die Bellman'sche Gleichung für die rekursive Berechung von $v(T, S_0)$.

(b) Zeigen Sie mit Induktion über i, dass $v(k,S) - S$ eine monoton fallende Funktion in S ist.

(c) Zeigen Si, dass eine optimale Ausübungsstrategie für die ACO die folgende Eigenschaft hat: Es existiert eine monoton steigende Folge $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_T$ reeller Zahlen, sodass die Entscheidung in Stufe i mit Zustand S dann und nur dann „Ausübung“ lautet, wenn $S \geq s_i$, für alle $i \in \{0,1,\ldots,T\}$.