Optimierung in der Finanzmathematik SS 2019
2. Übungsblatt

8. Wir betrachten ein Portfolio bestehend aus 5 Aktien deren erwarteten jährlichen Erträge bzw. deren Kovarianzmatrix in der untenstehenden Tabelle angegeben sind. Wir berücksichtigen stets zwei Szenarien: a) es gibt keine oberen Schranken für die Anteile der Investition pro Aktie, und b) es gibt eine obere Investitionsschranke von 40% pro Aktie. Leerverkäufe (short selling) sind nicht erlaubt.

Asset	Kovarianzen ($\times 10^{-2}$)					μ_i (in %)
1	1.10	0.93	0.62	0.74	-0.23	4.9
2		1.60	0.22	0.56	0.26	10.1
3			1.80	0.78	0.27	12.5
4				1.90	-0.56	8.9
5					2.20	14.7

(i) Formulieren Sie ein lineares Optimierungsproblem (LP) zur Bestimmung eines Portfolios mit maximalem erwarteten Ertrag. Lösen Sie dieses LP (einfach durch Inspektion) und bestimmen Sie somit den maximalen erwarteten Portfolioertrag $r_{\max}^{(a)}$, $r_{\max}^{(b)}$ ins Szenario (a) bzw. (b). Welche Varianz haben die jeweils optimalen Portfolios für Szenarien (a) bzw. (b)?

(ii) Formulieren Sie ein quadratisches Optimierungsproblem (QP) zur Bestimmung eines Portfolios mit minimaler Varianz. Lösen Sie dieses QP mit einem Solver Ihrer Wahl (zB. Matlab) und bestimmen Sie somit die minimale Portfoliovarianz für jedes der beiden Szenarien. Welchen erwarteten Ertrag $r_{\min}^{(a)}$, $r_{\min}^{(b)}$ hat das optimale Portfolio in Szenario (a) bzw. (b)?

(iii) Lösen Sie das Problem (1) für Szenario (a) bzw. (b), für jeweils 20 unterschiedliche Werte r, die die Knoten eines uniformen Gitters auf $[r_{\min}^{(a)}, r_{\max}^{(a)}]$ bzw. $[r_{\min}^{(b)}, r_{\max}^{(b)}]$darstellen. Mit $\mathcal{X}$ wird die Menge der zulässigen Portfolios in jeweiligen Szenario bezeichnet.

$$\begin{array}{cc} \min & x^T \Sigma x \\ udNB & \\ & \mu^T x \geq r \\ & x \in \mathcal{X} \end{array} \tag{1}$$

Stellen Sie die *Effizienzfronten* der beiden Szenarien graphisch dar und vergleichen bzw. interpretieren Sie die Ergebnisse. Zur Lösung der quadratischen Optimierungsoprobleme und für die graphische Visualisierung der Ergebnisse können Sie eine Software Ihrer Wahl verwenden (zB. Matlab).

9. Wir betrachten Portfolios bestehend aus fünf Positionen in Aktienindizes: `S&P 500`, `NASDAQ`, `DOW30`, `Nikkei225` und `Russell2000`. Das Portfoliogewicht von jedem Asset darf 0.30 nicht überschreiten, die Summe der Portfoliogewichte muss 1 betragen und *Leerverkäufe* (*short selling*) sind nicht erlaubt. Als Inputdaten sollen die adjustierten wöchentlichen Schlusskurse der fünf Positionen (`adjClose`[1]) für den Zeitraum Jänner 2011-Dezember 2018 dienen; diese Daten können etwa aus `finance.yahoo.com` heruntergeladen werden.

(a) Berechnen Sie den minimalen erwarteten Ertrag $r_{\min}$ und den maximalen erwarteten Ertrag $r_{\max}$ der oben genannten Portfolios. Bestimmen Sie für diese Portfolios die Effizienzfront in dem Sie auf das Intervall $[r_{\min}, r_{\max}]$ ein uniformes Gitter mit 21 Knoten (19 innere Knoten) legen und für jeden Gitterpunkt eine Instanz des MVO Problems lösen (d.h. das *mean-variance problem* (1), siehe Vorlesung), wobei der zu erreichende erwartete Ertrag r dem jeweiligen Gitterpunkt entspricht. Führen Sie diese Berechnungen jeweils zweimal durch: als empirischer Schätzer für den erwarteten monatlichen Ertrag eines Assets soll einmal das arithmetische Mittel und das andere Mal das geometrische Mittel der entsprechenden Zeitreihe dienen. Vergleichen Sie die Effizienzfronten in den beiden Berechnungsmodi.

[1] Das sind bzgl. Dividende und Splits adjustierte Schlusskurse

(b) Formulieren Sie das Sharpe-Ratio Maximierungsproblem als quadratisches Optimierungsproblem und lösen Sie es unter der Annahme, dass der risikoloser Ertrag 0.01% beträgt. Seien r_{SR} und σ_{SR} der erwartete Ertrag bzw. die Varianz des Portfolios, das das Sharpe-Ratio maximiert. Überzeugen Sie sich anhand einer graphischen Darstellung, dass die Kapitalallokationslinie (CAL), die durch den Punkt $(\mu_{\mathrm{SR}}, \sigma_{\mathrm{SR}})$ verläuft, tatsächlich eine Tangente der Effizienzfront darstellt. Auch hier sollen die Berechnungen zweimal durchgeführt werden, jeweils einmal mit dem arithmetischen und geometrischen Mittel als Schätzer für die erwarteten monatlichen (relativen) Erträge der einzelnen Assets. Vergleichen Sie die Ergebnisse in den beiden Berechnungsmodi.

10. Betrachten Sie die Daten aus Übungsbeispiel 9 und stellen Sie ein Portfoliooptimierungsproblem auf, das die absoluten Abweichung als Risikomaß verwendet, d.h. ein Problem, das dem MAD Modell von Konno und Yamazaki entspricht (siehe Vorlesung). Als Schätzer für die erwarteten monatlichen Erträge der einzelnen Assets sollten die geometrischen Mittel der jeweiligen Zeitreihen verwendet werden. Sei r eine Mindestgrenze für den erwarteten monatlichen Gesamtportfolioertrag. Bestimmen Sie $r_{\min}$ und $r_{\max}$ wie in Übungsbeispiel 9. Legen Sie auf das Intervall $[r_{\min}, r_{\max}]$ ein uniformes Gitter mit 21 Knoten (19 innere Knoten) und berechnen Sie das optimale MAD Portfolio für jeden Gitterpunkt r. Tragen Sie die optimalen Portfolios in eine Effizienzfront auf, analysieren Sie die Ergebnisse und vergleichen Sie diese mit den Ergebnissen aus Übungsbeispiel 9.

    Achtung: Auch im Fall des MAD Modells besteht die Effizienzfront aus den Punkten $(\sigma(x(r)), R(x(r)))$ für alle oben gennanten Gitterpunkte r; $x(r)$ ist eine Optimallösung des MAD Modells mit Parameter r ist und $\sigma(x(r))$, $R(x(r))$ sind die Standardabweichung des Ertrags bzw. der erwartete Ertrag von $x(r)$. Lässt der Vergleich der zwei Effizienzfronten den Schluss zu, dass die Erträge der berücksichtigten Assets annähernd normalverteilt sind?

11. Verwenden Sie den Black-Litterman Ansatz und bestimmen Sie die Effizienzfront für die Portfolios aus Übungsbeispiel 9 unter Berücksichtigung der folgenden Erwartungen (neben den historischen Daten):

    - Der wöchentliche erwartete Ertrag von Nasdaq (NC) wird um 3% niedriger als der erwartete Ertrag des S&P 500 (S&P500) ausfallen.
    - Der durchschnittliche wöchentliche erwartete Ertrag von NC und Dow wird um 5% höher als der erwartete Ertrag des Russell 2000 ausfallen.

    Betrachten Sie zwei Szenarien für die Zuversicht an diesen Erwartungen: (a) große Zuversicht, die durch $\omega_1 = \omega_2 = 0,0001$ modelliert wird, und (b) moderate Zuversicht in der ersten Erwartung und geringe Zuversicht in der zweiten, die durch $\omega_1 = 0,01$ und $\omega_2 = 0,1$ modelliert werden (siehe Vorlesung). Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den jeweiligen Ergebnissen aus Beispiel 9.

12. Betrachen Sie ein quadratisches Optimierungsproblem der Form

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^tQx + c^tx \\ \text{udNb} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

    wobei $Q \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$, $c \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $A \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$, $b \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$, und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$. Weiters sei Q positiv definit und habe A vollen Rang.

    (a) Geben Sie in diesem Fall die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen (KKT Bedingingen), d.h. die notwendingen und hinreichenden Bedingungen erster und zweiter Ordnung dafür, dass ein $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ eine Optimallösung des obigen Problems ist, konkret an (vgl. Vorlesung).

(b) Betrachten Sie das folgende quadratische Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & x_1x_2 + x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ \text{udNb} & \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 - x_2 = 0 \\ & x_i \geq 0, \ \text{für } i \in \{1,2,3\} \end{array}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der wie in (a) aufgestellten KKT Bedingungen, dass $x^* = (1/2, 1/2, 0)^t$ die Optimallösung dieses Problems ist.

13. Klassifikationsprobleme.

Bei einem Klassifikationsproblem sollen unterschiedliche Einheiten nach gewisssen Eigenschaften klassifiziert werden. Denken Sie zB. an Aktien, die nach Preis, Preis/Ertrag Quotient, Wachstum, Wachstumsraten, usw. klassifiziert werden sollen (zB. in Wachstum-Aktien, sogenannte „growth stocks“, und Wert-Aktien, sogenannte „value stocks“). In der Regel erhält man zunächst eine *Trainingsmenge* von Einheiten, für die sowohl die Realisierungen aller relevanten Merkmale als auch die Klassenzuordnung bekannt sind. Beim linearen Klassifikationsproblem wird in zwei Klassen A und B klassifiziert. Dazu werden zwei Parameter $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ gesucht, sodass $w^t x \leq \gamma - 1$ für alle Einheiten x aus A und $w^t x \geq \gamma + 1$ für alle Einheiten x aus B gilt. Hierbei ist $x \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, der die Realisierungen der einzelnen für die Klassifikation maßgeblichen Eigenschaften (n an der Zahl) quantitativ darstellt. Falls ein Vektor w und ein Skalar γ wie oben existieren, dann heißen die zwei Klassen der Trainingsmenge *linear separierbar* und die Hyperebenen $w^t x = \gamma - 1$ und $w^t x = \gamma + 1$ heißen *separierende Hyperebenen*. Für eine gegebene Traininsgmenge sind die separierenden Hyperebenen in der Regel nicht eindeutig und es ist oft erwünscht, separierende Hyperebenen mit maximalem Euklidischen Abstand zu bestimmen. (Der Euklidische Abstand zwischen zwei separierenden Hyperebenen wird *margin* genannt. Für zwei als Punktmengen in $\mathbb{R}^n$ betrachtete Hyperebenen f und g ist der Euklidischer Abstand, d.h. der margin $m(f,g)$, als $m(f,g) := \min\{d(a,b) \colon a \in f, b \in g\}$ definiert, wobei $d(a,b)$ der Euklidischer Abstand zwischen $a, b \in \mathbb{R}^n$ ist.)

Nach der Bestimmung der separierenden Hyperebenen für eine gegebene Trainingsmenge erfolgt die Klassifizierung jeder weiteren Einheit nur anhand des Wertes von $w^t x$, wobei x die Realisierungen der einzelnen n Eigenschaften der Einheit quantitativ darstellt. Falls $w^t x \leq \gamma - 1$, dann wird x der Klasse A zugeordnet, falls $w^t x \geq \gamma + 1$, so wird x der Klasse B zugeordnet.

(a) Formulieren Sie das lineare Klassifikationsproblem, d.h. die Bestimmung eines Vektors w^t und eines Skalars γ, die den Euklidischen Abstand zwischen den separierenden Hyperebenen maximieren, als quadratisches Optimierungsproblem.

(b) Die oben beschriebene Idee der linearen Separation kann auch in dem Fall verwendet werden, wenn die zwei Klassen der Trainingsmenge nicht linear separierbar sind. In diesem Fall hat das Problem aus (a) keine Lösung. Das Modell kann jedoch so erweitert werden, dass Verletzungen der Separationsbedingungen erlaubt und anhand von nicht-negativen Variablen modelliert werden. Die Zielfunktion kann dann so aufgesetzt werden, dass (i) der Abstand zwischen den zwei *quasi-separierenden* Hyperebenen maximiert wird, und (ii) die Summe der Verletzungen der Separationsbedingungen minimiert wird. Formulieren Sie dieses Problem als quadratisches Optimierungsproblem und führen Sie einen Steuerungsparameter ein, der die relative Gewichtung der beiden Ziele (i) und (ii) in der zusammengesetzten Zielfunktion steuert.

(c) Betrachten Sie das Klassifikationsproblem aus (a), wobei der Abstand zwischen den zwei separierenden Hyperebenen nicht mit Hilfe der Euklidischen Norm sondern mit Hilfe der Norm l_∞ in $\mathbb{R}^n$ definiert wird, d.h. $m(f,g) := \min\{d_\infty(a,b) \colon a \in f, b \in g\}$ wobei $d_\infty(a,b) := \max_{1 \leq i \leq n} |a_i - b_i|$. Lässt sich dieses Klassifikationsproblem als lineares Optimierungsproblem formulieren?