## Ein quadratisches Modell zur Berechnung des risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes ausgehend von Preisen der Optionen über einen gegebenen Basiswert

**Eingangsgrößen:** Basiswert $XYZ$, Zeithorizont $[t_0, t_1]$,
$m$ Europäische Call Optionen über XYZ mit Strike-Preisen $P_i$ und Ausübungsdatum $t_1$, für $1 \leq i \leq m$, mit $a := P_1 < P_2 < \ldots < P_m =: b$,
Preis $S_i^{(0)}$ der Option $i$ zum Zeitpunkt $t_0$, $1 \leq i \leq m$,
Konstanter Zinssatz $r$ im Zeitintervall $[t_0, t_1]$.

## Ein quadratisches Modell zur Berechnung des risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes ausgehend von Preisen der Optionen über einen gegebenen Basiswert

**Eingangsgrößen:** Basiswert $XYZ$, Zeithorizont $[t_0, t_1]$,
$m$ Europäische Call Optionen über XYZ mit Strike-Preisen $P_i$ und Ausübungsdatum $t_1$, für $1 \leq i \leq m$, mit $a := P_1 < P_2 < \ldots < P_m =: b$,
Preis $S_i^{(0)}$ der Option $i$ zum Zeitpunkt $t_0$, $1 \leq i \leq m$,
Konstanter Zinssatz $r$ im Zeitintervall $[t_0, t_1]$.

**Ausgabe:** Ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß $p$, die $\sum_{i=1}^m \left(S_i^{(0)} - S_i^{(0,p)}\right)^2$ minimiert, wobei $S_i^{(0,p)}$ der mit Hilfe von $p$ geschätzer Preis der Option $i$ zum Zeitpunkt $t_0$ ist, $1 \leq i \leq m$.

## Ein quadratisches Modell zur Berechnung des risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes ausgehend von Preisen der Optionen über einen gegebenen Basiswert

**Eingangsgrößen:** Basiswert $XYZ$, Zeithorizont $[t_0, t_1]$,
$m$ Europäische Call Optionen über XYZ mit Strike-Preisen $P_i$ und Ausübungsdatum $t_1$, für $1 \leq i \leq m$, mit $a := P_1 < P_2 < \ldots < P_m =: b$,
Preis $S_i^{(0)}$ der Option $i$ zum Zeitpunkt $t_0$, $1 \leq i \leq m$,
Konstanter Zinssatz $r$ im Zeitintervall $[t_0, t_1]$.

**Ausgabe:** Ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß $p$, die $\sum_{i=1}^m \left(S_i^{(0)} - S_i^{(0,p)}\right)^2$ minimiert, wobei $S_i^{(0,p)}$ der mit Hilfe von $p$ geschätzer Preis der Option $i$ zum Zeitpunkt $t_0$ ist, $1 \leq i \leq m$.

**Annahme:** Der Preis $S$ des Basiswertes $XYZ$ zum Zeitpunkt $t_1$ nimmt einen Wert aus $[a, b]$ an.

## Ein quadratisches Modell zur Berechnung des risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes ausgehend von Preisen der Optionen über einen gegebenen Basiswert

**Eingangsgrößen:** Basiswert $XYZ$, Zeithorizont $[t_0, t_1]$,
$m$ Europäische Call Optionen über XYZ mit Strike-Preisen $P_i$ und Ausübungsdatum $t_1$, für $1 \leq i \leq m$, mit $a := P_1 < P_2 < \ldots < P_m =: b$,
Preis $S_i^{(0)}$ der Option $i$ zum Zeitpunkt $t_0$, $1 \leq i \leq m$,
Konstanter Zinssatz $r$ im Zeitintervall $[t_0, t_1]$.

**Ausgabe:** Ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß $p$, die $\sum_{i=1}^{m} \left( S_i^{(0)} - S_i^{(0,p)} \right)^2$ minimiert, wobei $S_i^{(0,p)}$ der mit Hilfe von $p$ geschätzer Preis der Option $i$ zum Zeitpunkt $t_0$ ist, $1 \leq i \leq m$.

**Annahme:** Der Preis $S$ des Basiswertes $XYZ$ zum Zeitpunkt $t_1$ nimmt einen Wert aus $[a, b]$ an.

**Ansatz:** Approximiere $p$ durch einen natürlichen kubischen Spline mit Knoten $P_i$, $1 \leq i \leq m$.

## Die Spline-Darstellung und die Restriktionen

Sei $p\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$ mit $\int_a^b p(s)ds = 1$, $p(s) = f_j(s)$, für $s \in [P_{j-1}, P_j]$, $j \in \{2, \ldots, m\}$, wobei $f_j$ ein Polynom dritten Grades mit $f_j(s) := \alpha_j s^3 + \beta_j s^2 + \gamma_j s + \delta_j$, für $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j \in \mathbb{R}$, $j \in \{2, 3, \ldots, m\}$, ist.

## Die Spline-Darstellung und die Restriktionen

Sei $p\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$ mit $\int_a^b p(s)ds = 1$, $p(s) = f_j(s)$, für $s \in [P_{j-1}, P_j]$, $j \in \{2, \ldots, m\}$, wobei $f_j$ ein Polynom dritten Grades mit $f_j(s) := \alpha_j s^3 + \beta_j s^2 + \gamma_j s + \delta_j$, für $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j \in \mathbb{R}$, $j \in \{2, 3, \ldots, m\}$, ist.

Sei $y = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \ldots, \alpha_m, \beta_m, \gamma_m, \delta_m) \in \mathbb{R}^{4(m-1)}$

## Die Spline-Darstellung und die Restriktionen

Sei $p\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$ mit $\int_a^b p(s)ds = 1$, $p(s) = f_j(s)$, für $s \in [P_{j-1}, P_j]$, $j \in \{2,\ldots,m\}$, wobei $f_j$ ein Polynom dritten Grades mit $f_j(s) := \alpha_j s^3 + \beta_j s^2 + \gamma_j s + \delta_j$, für $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j \in \mathbb{R}$, $j \in \{2,3,\ldots,m\}$, ist.
Sei $y = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \ldots, \alpha_m, \beta_m, \gamma_m, \delta_m) \in \mathbb{R}^{4(m-1)}$

**Spline Restriktionen:**

$$\begin{aligned}
f_j(P_j) &= f_{j+1}(P_j) \quad j \in \{2,3,\ldots,m-1\} \\
f_j^{'}(P_j) &= f_{j+1}^{'}(P_j) \quad j \in \{2,3,\ldots,m-1\} \\
f_j^{''}(P_j) &= f_{j+1}^{''}(P_j) \quad j \in \{2,3,\ldots,m-1\} \\
f_2^{''}(P_1) = f_m^{''}(P_m) &= 0
\end{aligned}$$

**Die Spline-Darstellung und die Restriktionen**

Sei $p\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$ mit $\int_a^b p(s)ds = 1$, $p(s) = f_j(s)$, für $s \in [P_{j-1}, P_j]$, $j \in \{2,\dots,m\}$, wobei $f_j$ ein Polynom dritten Grades mit $f_j(s) := \alpha_j s^3 + \beta_j s^2 + \gamma_j s + \delta_j$, für $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j \in \mathbb{R}$, $j \in \{2,3,\dots,m\}$, ist.
Sei $y = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \dots, \alpha_m, \beta_m, \gamma_m, \delta_m) \in \mathbb{R}^{4(m-1)}$

**Spline Restriktionen:**

$$\begin{aligned} f_j(P_j) &= f_{j+1}(P_j) \quad j \in \{2,3,\dots,m-1\} \\ f_j^{'}(P_j) &= f_{j+1}^{'}(P_j) \quad j \in \{2,3,\dots,m-1\} \\ f_j^{''}(P_j) &= f_{j+1}^{''}(P_j) \quad j \in \{2,3,\dots,m-1\} \\ f_2^{''}(P_1) = f_m^{''}(P_m) &= 0 \end{aligned}$$

**Der geschätzte Preis der Option** $i$**,** $i \in \{1,2,\dots,n\}$

$$\begin{aligned} S_i^{(0,p)} &= \tfrac{1}{1+r} \int_a^b \max\{0, s-P_i\} p(s)ds \\ &= \tfrac{1}{1+r} \sum_{j=2}^m \int_{P_{j-1}}^{P_j} \max\{0, s-P_i\} p(s)ds \\ &= \tfrac{1}{1+r} \sum_{j=i+1}^m \int_{P_{j-1}}^{P_j} (s-P_i) f_j(s)ds =: h_i(y) \ (\underline{\text{linear in } y}!) \end{aligned}$$

**Das quadratische Optimierungsmodell mit Variablen $y \in \mathbb{R}^{4(m-1)}$:**

**Zielfunktion:** $\sum_{i=1}^{m} \left( h_i(y) - S_i^{(0)} \right)^2$

**Das quadratische Optimierungsmodell mit Variablen $y \in \mathbb{R}^{4(m-1)}$:**

**Zielfunktion:** $\sum_{i=1}^{m} \left( h_i(y) - S_i^{(0)} \right)^2$

**Restriktionen (1)-(3), für** $j \in \{2, \ldots, m-1\}$**, (5) für** $j \in \{2, \ldots, m\}$**, und (4), (6):**

$$
\begin{aligned}
\alpha_j P_j^3 + \beta_j P_j^2 + \gamma_j P_j + \delta_j &= \alpha_{j+1} P_j^3 + \beta_{j+1} P_j^2 + \gamma_{j+1} P_j + \delta_{j+1} && (1)\\
3\alpha_j P_j^2 + 2\beta_j P_j + \gamma_j &= 3\alpha_{j+1} P_j^2 + 2\beta_{j+1} P_j + \gamma_{j+1} && (2)\\
6\alpha_j P_j + 2\beta_j &= 6\alpha_{j+1} P_j + 2\beta_{j+1} && (3)\\
6\alpha_2 P_1 + 2\beta_2 &= 6\alpha_m P_m + 2\beta_m = 0 && (4)\\
\alpha_j P_j^3 + \beta_j P_j^2 + \gamma_j P_j + \delta_j &\geq 0 && (5)\\
\alpha_2 P_1^3 + \beta_2 P_1^2 + \gamma_2 P_1 + \delta_2 &\geq 0 && (6)
\end{aligned}
$$

**Das quadratische Optimierungsmodell mit Variablen $y \in \mathbb{R}^{4(m-1)}$:**

**Zielfunktion:** $\sum_{i=1}^{m} \left( h_i(y) - S_i^{(0)} \right)^2$

**Restriktionen (1)-(3), für $j \in \{2, \ldots, m-1\}$, (5) für $j \in \{2, \ldots, m\}$, und (4), (6):**

$$
\begin{aligned}
\alpha_j P_j^3 + \beta_j P_j^2 + \gamma_j P_j + \delta_j &= \alpha_{j+1} P_j^3 + \beta_{j+1} P_j^2 + \gamma_{j+1} P_j + \delta_{j+1} && (1)\\
3\alpha_j P_j^2 + 2\beta_j P_j + \gamma_j &= 3\alpha_{j+1} P_j^2 + 2\beta_{j+1} P_j + \gamma_{j+1} && (2)\\
6\alpha_j P_j + 2\beta_j &= 6\alpha_{j+1} P_j + 2\beta_{j+1} && (3)\\
6\alpha_2 P_1 + 2\beta_2 &= 6\alpha_m P_m + 2\beta_m = 0 && (4)\\
\alpha_j P_j^3 + \beta_j P_j^2 + \gamma_j P_j + \delta_j &\geq 0 && (5)\\
\alpha_2 P_1^3 + \beta_2 P_1^2 + \gamma_2 P_1 + \delta_2 &\geq 0 && (6)
\end{aligned}
$$

**Beobachtungen:**

- Die Restriktionen (5) für $j \in \{2, \ldots, m\}$ und (6), stellen eine Relaxation der Bedingung $p(s) \geq 0, \forall s \in [a, b]$, dar.
- Es gibt $3m - 1$ lineare Restriktionen und $4m - 4$ Variablen.
- Die quadratische Zielfunktion ist konvex.
- I.A. ist die Knotenmenge des Splines eine Obermenge der Menge der Strike-Preise.