

Die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen

Wir betrachten folgendes Optimierungsproblem P

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{u.d.Nb.} \quad & \\ & g_i(x) = 0 \quad i \in \mathcal{E} \\ & g_i(x) \geq 0 \quad i \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

wobei die Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$ stetig differenzierbar sind.

Sei $\lambda = (\lambda_i)_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}}$ ein Vektor von Lagrange Multiplikatoren und $L(x, \lambda) := f(x) - \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \lambda_i g_i(x)$ die Lagrange Funktion.

Definition: Sei $\mathcal{X} := \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) = 0, \forall i \in \mathcal{E}, g_i(x) \geq 0, \forall i \in \mathcal{I}\}$ die Menge der zulässigen Lösungen (oder Punkten) von P .

Ein für P zulässiger $x \in \mathbb{R}^n$ heißt regulärer Punkt (bzgl. den Restriktionen von P) falls $\nabla g_i(x)$, $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{J}$, linear unabhängig sind, wobei $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ die Indizes der von x mit Gleichheit erfüllten Ungleichheitsrestriktionen sind.

Die entsprechenden Restriktionen $g_i(x) = 0$, $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{J}$, werden *aktive Restriktionen* in x genannt.

Notwendige Optimalitätsbedingungen 1. Ordnung

Sei P das oben definierte Problem mit stetig differenzierbaren Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$. Für jeden regulären Punkt x^* , der ein lokales Optimum von f auf \mathcal{X} ist, existiert ein Vektor von Lagrange Multiplikatoren λ , der folgende Bedingungen erfüllt:

$$\nabla f(x^*) - \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0 \quad (1)$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (2)$$

$$\lambda_i g_i(x^*) = 0 \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (3)$$

Anmerkung: Die notwendigen Optimalitätsbedingungen 1. Ordnung sind auch von lokalen Maxima und Sattelpunkten der Funktion f auf \mathcal{X} erfüllt.

Falls f and g_i , $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$, zweimal stetig differenzierbar sind, dann können Maxima und Sattelpunkte mit Hilfe der Bedingungen 2. Ordnung ausgeschlossen werden.

Notwendige Optimalitätsbedingungen 2. Ordnung

Sei P das oben definierte Problem mit zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$. Für jeden regulären Punkt x^* , der ein lokales Optimum von f auf \mathcal{X} ist, existiert ein Vektor von Lagrange Multiplikatoren λ , der neben (1), (2), (3) auch die folgende Bedingung erfüllt:

$$N^t(x^*) \left(\nabla^2 f(x^*) - \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \lambda_i \nabla^2 g_i(x^*) \right) N(x^*) \text{ ist positiv semidefinit.} \quad (4)$$

∇^2 stellt (wie üblich) die Hesse Matrix dar.

$N(x^*)$ ist eine Basis des Kerns der folgenden linearen Abbildung

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|+|\mathcal{J}|}, x \mapsto A(x^*)x,$$

wobei $A(x^*)$ die Jacobi Matrix der in x^* aktiven Restriktionen mit Indizes in $\mathcal{E} \cup \mathcal{J}$ ist.

Anmerkung: Falls es für einen regulären Punkt x^* Lagrange Multiplikatoren existieren, die die Bedingungen (1)-(4) erfüllen, so ist x^* nicht notwendigerweise ein lokales Minimum. Die hinreichenden Bedingungen sind etwas restriktiver.

Hinreichende Optimalitätsbedingungen 2. Ordnung

Sei P das oben definierte Problem mit zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$. Sei x^* ein (zulässiger und) regulärer Punkt. Sei $A(x^*)$ die Jacobi Matrix der in x^* aktiven Restriktionen und $N(x^*)$ eine Basis des Kerns der lineare Abbildung $x \mapsto A(x^*)x$ (wie bei den notwendigen Bedingungen 2. Grades).

Dann gilt:

x^* ist ein lokales Minimum von f auf \mathcal{X} , falls

(a) ein Vektor von Lagrange Multiplikatoren λ existiert, der die Bedingungen (1)-(3) und die Implikation (5) erfüllt

$$g_i(x^*) = 0, i \in \mathcal{I} \implies \lambda_i > 0 \quad (5)$$

und

(b) die Matrix

$$N^t(x^*) \left(\nabla^2 f(x^*) - \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \lambda_i \nabla^2 g_i(x^*) \right) N(x^*) \text{ ist positiv definit.} \quad (6)$$