# Kombinatorische Optimierung 1, WS 2020-2021

## 8. Übungsblatt

43. Ist die folgende Matrix vollständig unimodular?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

44. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, eine vollständig unimodulare matrix. Sind folgende Matrizen vollständig unimodular: $(A|A)$, $A^{-1}$, $A|I_m$? ($I_m$ ist die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{m \times m}$ und $A|B$ bezeichnet die spaltenweise Verkettung zeier Matrizen $A$ und $B$ mit der gleichen Anzahl von Zeilen.)

45. (a) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die vollständige Unimodularität der Matrizen $A$ und $B$ nicht hinreichend für die vollständige Unimodularität der Matrix $(A|B)$ ist.

    (b) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \{0, 1, -1\}^{m \times n}$ eine vollständig unimodulare Matrix. Zeigen Sie, dass die durch die Verkettung der Matrizen $A$, $-A$, und $I$ entstandene Matrix $(A| - A|I)$ vollständig unimodular ist[1]. $I$ bezeichnet hier die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{m \times m}$.

46. Betrachten Sie die folgenden linearen Ungleichungssysteme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

    Beobachten Sie, dass die beiden Systeme von Ungleichungen dasselbe Polyeder definieren. Zeigen Sie, dass das linke System von Ungleichungen TDI ist aber das rechte nicht.

47. Die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix $A = (a_{ie})$ eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Matrix aus $\{0, 1\}^{n \times m}$ wobei $n := |V|$, $m := |E|$ gilt und $\forall i \in V$, $\forall e \in E$, $a_{i,e} = 1$ dann und nur dann, wenn Knoten $i$ mit Kante $e$ inzidiert.

    Analog ist die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix $A = (a_{ie})$ eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$ eine Matrix aus $\{0, 1, -1\}^{n \times m}$ wobei $n := |V|$, $m := |E|$ und $\forall i \in V$, $\forall e = (x, y) \in E$, $a_{i,e} = -1$ wenn Knoten $i = x$, $a_{i,e} = 1$ wenn Knoten $i = y$, und $a_{i,e} = 0$ sonst.

    Beweisen Sie folgende Aussagen:

    (a) Die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix eines Graphen ist dann und nur dann vollständig unimodular wenn der Graph bipartit ist.

    (b) Für jeden beliebigen gerichteten Graphen ist die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix vollständig unimodular.

48. Ein quadratische $n \times n$ Matrix $P \in \{0, 1\}^{n \times n}$ heißt *Permutationsmatrix* wenn jede Zeile und jede Spalte von $P$ genau eine Eins enthält. (Inwieweit ist dieser Name gerechtfertigt?) Sei $\Pi_n$ die Menge der $n \times n$ Permutationsmatrizen.

    Ein quadratische $n \times n$ Matrix $M \in [0, 1]^{n \times n}$ heißt *doppelt stochatisch* wenn alle Zeilen- und Spaltensummen von $M$ gleich Eins sind. Sei $D_n$ die Menge der doppelt stochastischen $n \times n$ Matrizen.

[1] Hiermit wird auch eine im Beweis des Satzes von Ghouila-Houri in der Vorlesung verwendete Beobachtung bewiesen.

(a) Ziegen Sie, dass $D_n$ ein Polyeder in $\mathbb{R}^{n^2}$ bildet, für jedes beliebige und fixe $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Finden Sie eine Charakterisierung von doppelt stochastischen Matrix mit Hilfe von linearen Ungleichungen.

(b) Beobachten Sie, dass die Elemente von $\Pi_n$ den ganzzahligen Vektoren in $D_n$ entsprechen. Zeigen Sie, dass jede doppelt stochastische $n \times n$ Matrix als konvexe Kombination von $n \times n$ Permutationsmatrizen darstellbar ist[2].

49. (Für besonderes Interessierte)

Eine $m \times n$ Matrix mit 0-1 Einträgen wird als *Intervallmatrix* bezeichnet, wenn für alle Spalten die Einsen ein Intervall bilden, d.h. dass aus $a_{ij} = a_{kj} = 1$ mit $k > i + 1$ die Gleichungv $a_{\ell j} = 1$ folgt, für alle $\ell = i + 1, \ldots, k - 1$. Zeigen Sie, dass Intervallmatrizen vollständig unimodular sind.

Hinweis: Seien $r_j^{(a)}$ und $r_j^{(e)}$ die Zeilenindizes der ersten bzw. letzten Eins in der $j$-ten Spalte der Intervallmatrix $A$. Sortieren Sie die Spalten von $A$ derart, dass $r_1^{(a)} \leq r_2^{(a)} \leq \ldots \leq r_m^{(a)}$ gilt. Zeigen Sie dann via Induktion über die Anzahl $n$ der Spalten von $A$, dass die hinreichende Bedingung des Satzes von Ghouila-Houri erfüllt ist.

# Literatur

[1] B. Korte und J. Vygen, *Kombinatorische Optimierung: Theorie und Algorithmen*, Springer, 2012, ebook: `https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-25401-7`.

[2] Dieses Ergebnis ist auch bekannt als Birkhoff-von-Neumann Theorem, siehe Abschnitt 11.1 in [1].