Kombinatorische Optimierung 1, WS 2020-2021

5. Übungsblatt

27. Sei G ein Digraph mit Kantenkapazitäten $u\colon E(G) \to \mathbb{R}_+$ und Balance-Werten $b\colon V(G) \to \mathbb{R}$ mit $\sum_{v \in V(G)} b(v) = 0$. Beweisen Sie, dass es genau dann einen b-Fluss gibt, wenn folgende Ungleichung gilt:
$$\sum_{e \in \delta^+(X)} u(e) \geq \sum_{v \in X} b(v) \text{ für alle } X \subseteq V(G)\,.$$
Hinweis: Um die hinreichende Bedingung zu zeigen, kann die Charakterisierung der Existenz eines b-Flusses anhand eines maximalen Fluss-Problems herangezogen werden. Für das max-Fluss-Problem kann dann der max-Fluss-min-Schnitt-Satz verwendet werden.

28. Ein Restaurantbesitzer hat folgendes Problem: Er weiß, dass für den Tag i der nächsten Woche d_i Servietten benötigt werden ($i = 1, \ldots, 7$). Jeden Morgen können frische Servietten zum Preis von a Euro pro Serviette gekauft werdenn. Ferner kann am Ende jeden Tages ein Teil der benutzten Servietten zur Reinigung gebracht werden. Dort gibt es das Schnell- und Normalservice zum Preis von je b bzw. c ($b > c$) Euro pro Serviette. Bei der Normalreinigung erhält man die Servietten am übernächsten Tag in der Früh, bei der Schnellreinigung bereits am nächsten Tag. Der Restaurantbesitzer möchte einen Wochenplan für das Servietten-Management erstellen, der den Bedarf erfüllt und die Gesamtkosten minimiert. Modellieren Sie das Problem als minimales Kostenflussproblem.

29. (a) Lösen Sie das in der Abbildung 1 gegebene MKFP mit Hilfe des MMCC-Algorithmus, wobei für jede Kante (i, j) die Kapazitäten und die Kosten $(u(i, j), c(i, j))$ und für jeden Knoten die Nachfrage bzw. das Angebot $b(v)$ gegeben sind. Verwenden Sie dabei folgenden Startfluss: $f(1, 3) = 1, f(3, 4) = 3, f(3, 5) = 2, f(2, 3) = 4, f(5, 2) = 8$.
    (b) Geben Sie für den optimalen Fluss f zulässige Knotenpotentiale $\pi(v)$ an und überprüfen Sie, dass $c_\pi(e) \geq 0$ für alle $e \in E(G_f)$.

30. Lösen Sie das in der Abbildung 1 gegebene MKFP mit Hilfe des Sukzessive-Kürzeste-Wegealgorithmus.

31. Zeigen Sie, dass jede Instanz des Minimalen-Kosten-Flussproblems in einem Netzwerk mit n Knoten und m Kanten in einer Instanz des Hitchcock Problems mit $n+m$ Knoten und $2m$ Kanten äquivalent transformiert werden kann.

    Das Hitchcock Problem wurde in der Volesung folgendermaßen definiert. Der Input besteht aus einem bipartiten Digraphen $G = (A \dot\cup B, E)$ in dem alle Kanten von A nach B gerichtet sind (d.h. $E \subseteq A \times B$), den Balance-Werten $b\colon A \dot\cup B \to \mathbb{R}$ mit $b(v) \geq 0$, $\forall v \in A$, $b(v) \leq 0$, $\forall v \in B$ und $\sum_{v \in V} b(v) = 0$, sowie der Kostenfunktion $c\colon E \to \mathbb{R}$. Die Kapazität jeder Kante ist unbeschränkt. In diesem Netzwerk wird ein b-Fluss mit minimalen Kosten gesucht. Falls es in dem Input-Netzwerk keinen b-Fluss gibt, so soll eine entsprechende Botschaft ausgegeben werden.

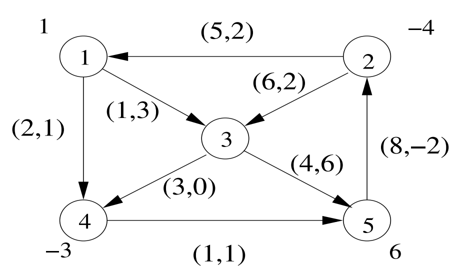

Abbildung 1: MKFP für Aufgabe 29 und 30