**Kombinatorische Optimierung 1, WS 2020-2021**

**3. Übungsblatt**

16. Bestimmen Sie mit Hilfe des Algorithmus von Edmonds und Karp einen maximalen Fluss im Graphen in Abbildung 1. Geben Sie auch einen minimalen Schnitt an. Die Zahlen auf den Kanten geben die Kapazitäten an. Starten Sie den Algorithmus mit folgendem Fluss:

| Kante | s-1 | s-2 | s-3 | 1-2 | 2-3 | 1-t | 2-t | 3-t |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fluss | 8 | 8 | 0 | 2 | 2 | 6 | 8 | 2 |

Geben Sie den optimalen Flusswert an!

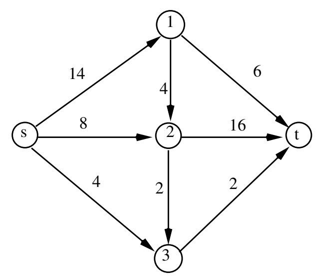


Abbildung 1: Netzwerk für Bsp. 16

17. Die Kantenvariante des Satzes von Menger

Sei $G$ ein gerichteter (ungerichteter) Graph, seien $s, t \in V(G)$ zwei Knoten in $G$, und sei $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Beweisen Sie den Satz von Menger: Es gibt $k$ paarweise kantendisjunkte $s$-$t$-Wege in $G$ dann und nur dann, wenn nach Entfernung von $k-1$ beliebigen Kanten, der Knoten $t$ weiterhin vom Knoten $s$ aus in $G$ erreichbar bleibt.

Hinweis: Im gerichteten Fall wandeln Sie $G$ in einem Netwerk um, in dem Sie den Kanten von $G$ passende Kapazitäten zuordnen. Dann wenden Sie in diesem Netzwerk den Max-Fluss-Min-Schnitt Satz an.

Im gerichteten Fall ist die Konstruktion des Netzwerks etwas komplizierter. Dazu muss jede Kante $e = \{v, w\}$ durch 5 gerichtete Kanten $\{(v, x_e), (w, x_e), (x_e, y_e), (y_e, v), (y_e, w)\}$ ersetzt werden, wobei $x_e$, $y_e$ zwei neue eigens zur Kante $e$ zugeordnete Knoten sind.

18. Die Knotenvariante des Satzes von Menger

Beweisen Sie folgende Aussage. Sei $G$ ein Graph (gerichtet oder ungerichtet), seien $s$ und $t$ zwei nicht benachbarte Knoten in $G$, und sei $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Es gibt $k$ intern-disjunkte $s$-$t$-Wege in $G$ dann und nur dann, wenn nach Entfernung von $k-1$ beliebigen Knoten in $G \setminus \{s, t\}$, der Knoten $t$ vom Knoten $s$ aus in $G$ erreichbar ist. Zwei $s$-$t$-Wege heißen *intern-disjunkt* falls Sie keine gemeinsame innere Knoten haben.

19. (Für Ambitionierte.)

   (a) Zeigen Sie, dass der Algorithmus von Ford und Fulkerson im Falle von irrationalen Kapazitäten nicht zwangsweise terminiert. Betrachten Sie dazu das Netzwerk aus Abbildung 2. Alle Liniensegmente sind Kanten in beiden Richtungen. Jede Kante hat Kapazität $\frac{1}{1-\sigma}$ bis auf die folgenden 4 Kanten mit den Kapazitäten:

   $$u((x_1, y_1)) = 1\,,\ u((x_2, y_2)) = \sigma\,,\ u((x_3, y_3)) = u((x_4, y_4)) = \sigma^2$$

   wobei $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Beachten Sie, dass $\sigma^n = \sigma^{n+1} + \sigma^{n+2}$. Untersuchen Sie die Konvergenz der Folge $(v(f_i))_{i\in\mathbb{N}}$, wobei $v(f_i)$ der Wert des in der $i$-ten Iteration generierten Flusses ist.

   (b) Lösen Sie das obige Problem mit dem Algorithmus von Edmonds und Karp.

20. Betrachten Sie das maximale $s$-$t$-Fluss Problem in einem Netzwerk $(G, u, s, t)$ und formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm. Zeigen Sie, dass jede Instanz des maximalen $s$-$t$-Fluss Problems eine Optimallösung besitzt (auch wenn die Kapazitätfunktion $u$ irrationale Werte annimmt).

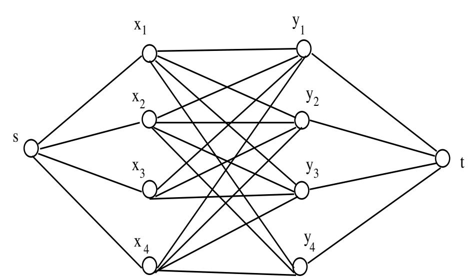


Abbildung 2: Netzwerk für Bsp. 19