Kombinatorische Optimierung 1, WS 2018-2019
7. Übungsblatt

40. Zeigen Sie, dass die folgenden Paare $(E, \mathcal{F})$, wobei E eine Grundmenge und $\mathcal{F} \subseteq 2^E$ eine Familie von Teilmengen von E ist, Unabhängigkleitsysteme jedoch im Allgemeinen keine Matriode sind.
    (a) Sei G ein ungerichteter Graph. Betrachte $(E, \mathcal{F})$ mit $E = V(G)$ und
    $$\mathcal{F} = \{F \subseteq E \colon F \text{ ist eine stabile Menge in } G\}.$$
    (b) Sei G ein vollständiger, ungerichteter Graph. Betrachte $(E, \mathcal{F})$ mit $E = E(G)$ und $\mathcal{F} = \{F \subseteq E \colon F \text{ ist eine Teilmenge eines hamiltonschen Kreises in } G\}$.
    (c) Sei G ein Digraph und $s, t \in V(G)$, $s \neq t$, sodass t von s aus erreichbar ist. Betrachte $(E, \mathcal{F})$ mit $E = E(G)$ und $\mathcal{F} = \{F \subseteq E \colon F \text{ ist eine Teilmenge eines } s\text{-}t\text{-Weges in } G\}$.
    (d) Gegeben seien die nichtnegativen Zahlen $n \in \mathbb{N}$, $w_i \in \mathbb{R}_+$, for $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ und $W \in \mathbb{R}_+$. Betrachte $(E, \mathcal{F})$ mit $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ und $\mathcal{F} = \{F \subseteq E \colon \sum_{j \in F} w_j \leq W\}$.
    (e) Sei G ein Digraph. Betrachte $(E, \mathcal{F})$ mit $E = E(G)$ und $\mathcal{F} = \{F \subseteq E \colon (V, F) \text{ ist ein Branching in } G\}$.
    (f) Sei G ein ungerichteter Graph. Betrachte $(E, \mathcal{F})$ mit $E = E(G)$ und $\mathcal{F} = \{F \subseteq E \colon F \text{ ist ein Matching in } G\}$.

41. Betrachten Sie das Unabhängigkeitssystem aus Übungsbeispiel 40 (a) für $G = C_4$, d.h. G ist ein Kreis auf 4 Knoten: Geben Sie die Menge $\mathcal{B}$ der Basen, die Menge $\mathcal{C}$ der Kreise (äquivalent auch Zyklen genannt), die Rangfunktion $r \colon 2^E \to \mathbb{N}$, die untere Rangfunktion $\rho \colon 2^E \to \mathbb{N}$, den Rangquotienten $q(E, \mathcal{F})$, sowie die Abschlussfunktion $\sigma \colon 2^E \to \mathbb{N}$ explizit an.

42. Ist die folgende Matrix vollständig unimodular?
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

43. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, eine total unimodulare matrix. Sind folgende Matrizen total unimodular: $(A|A)$, A^{-1}, $A|I_m$? (I_m ist die Einheitsmatrix in the $R^{m \times m}$ und $A|B$ bezeichnet die spaltenweise Verketung zeier Matrizen A und B mit der gleichen Anzahl von Zeilen.)

44. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die vollständige Unimodularität der Matrizen A und B nicht hinreichend für die vollständige Unimodularität der Matrix $(A|B)$ ist.

45. Betrachten Sie die folgenden linearen Ungleichungssysteme:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
    Beobachten Sie, dass die beiden Systeme von Ungleichungen dasselbe Polyeder definieren. Zeigen Sie, dass das linke System von Ungleichungen TDI ist aber das rechte nicht.

46. (Für besonderes Interessierte)
    Eine $m \times n$ Matrix mit 0-1 Einträgen wird als *Intervallmatrix* bezeichnet, wenn für alle Spalten die 1-Einträge ein Intervall bilden, d.h. dass aus $a_{ij} = a_{kj} = 1$ mit $k > i + 1$ die Gleichungv $a_{\ell j} = 1$ folgt, für alle $\ell = i + 1, \ldots, k - 1$. Zeigen Sie, dass Intervallmatrizen vollständig unimodular sind.
    Hinweis: Seien $r_j^{(a)}$ und $r_j^{(e)}$ die Zeilenindizes des ersten bzw. letzten Einsers in der j-ten Spalte einer Intervallmatrix $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$, $m, n \in \mathbb{N}$. Sortieren Sie die Spalten von A derart, dass $r_1^{(a)} \leq r_2^{(a()} \leq \ldots \leq r_m^{(a)}$ gilt. Zeigen Sie via Induktion über die Anzahl n der Spalten von A, dass die hinreichende Bedingung des Satzes von Ghouila-Houri erfüllt ist.