Kombinatorische Optimierung 1, WS 2018-2019

6. Übungsblatt

34. Verwenden Sie den *Edmonds Blossom Algorithmus* zur Bestimmung eines Matchings mit maximaler Kardinalität in dem Graphen in Abbildung 1. Initialisieren Sie den Algorithmus mit dem leeren Matching. Geben Sie eine Teilmenge S der Knotenmenge an, die die Tutte-Berge-Formel erfüllt und begründen Sie ihre Antwort.

35. Zeigen Sie mit Hilfe des Optimalitätskriteriums für Matchings mit maximaler Kardinalität (Satz von Berge), dass jeder einfacher Graph mit n Knoten und minimalem Grad k ein Matching der Kardinalität $\min\{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, k\}$ besitzt. (Ein *einfacher Graph* ist ein ungerichteter Graph ohne Schleifen und ohne Mehrfachkanten.)

36. Beweisen Sie, dass jeder 3-reguläre Graph mit höchstens 2 Brücken ein perfektes Matching besitzt. (Eine *Brücke* in einem Graphen G ist eine Kante $e \in E(G)$ mit der Eigenschaft, dass $G - e$ mehr Zusammenhangskomponenten als G hat.) Gibt es einen 3-regulären Graphen ohne ein perfektes Matching?

    Hinweis: Verwenden Sie die Tutte-Berge-Formel.

37. (Für besonders Interessierte.) Die Ungarische Methode für das *Lineare Zuordnungsproblem* oder, äquivalent, das *Minimum-Gewichtete Perfektes-Matching-Problem in bipartiten Graphen*

    Sei $G = (A\dot{\cup}B, E)$ ein vollständiger bipartiter Graph mit $|A| = |B|$ und $c_{ij} \in \mathbb{R}_+$ das Gewicht der Kante $\{i, j\}$) für $i \in A$ und $j \in B$. Das Gewicht eines perfekten Matching M in G ist als $c(M) := \sum_{\{i,j\}\in M} c_{ij}$ definiert. Beim Linearen Zuordnungsproblem (oder, äquivalent, bei dem Minimum-GewichtetenPerfekte-Matching-Problem in bipartiten Graphen) soll in dem vollständigen bipartiten Graphen $G = (A\dot{\cup}B, E)$ ein perfektes Matching M^* in G mit minimalem Gewicht bestimmt werden, d.h. $c(M^*) = \min\{c(M) \colon M \text{ ist ein perfektes Matching in } G\}$. Eine Abbildung $y \colon A\dot{\cup}B \to \mathbb{R}$ heißt Potential falls $y_i + y_j \le c_{ij}$, $\forall i \in A$, $\forall j \in B$. Die Summe $v(y) := \sum_{i\in A\dot{\cup}B} y(i)$ heißt Wert des Potentials.

    (a) Zeigen Sie, dass $c(M) \ge v(y)$ gilt für jedes perfekte Matching M und jedes Potential y.

    (b) Eine Kante $e = \{i, j\} \in E(G)$ heißt *straff* bzgl. einem Potential y falls $y(i) + y(j) = c_{ij}$. Wir bezeichnen mit G_y jenen Teilgraphen von G, der aus den straffen Kanten bzgl. y besteht. Die Ungarische Methode startet mit einem leeren Matching und einem Potential $y(i) = 0$, $\forall i \in V(G)$, und modifiziert iterativ das Matching und das Potential, sodass das Matching stets aus straffen Kanten besteht. Der Algorithmus terminiert, wenn das aktuelle Matching perfekt ist. Während des Verfahrens wird der Graph G_y so orientiert, dass alle Matching-Kanten von B nach A und alle anderen Kanten in $E(G_y)$ von A nach B verlaufen.

    Der allgemeine Iterationsschritt sieht folgendermaßen aus. Seien R_A bzw. R_B die Mengen der durch M ungematchten Knoten in A bzw. B. Sei Z_y die Menge der Knoten von G, die ausgehend von Knoten aus R_A entlang von gerichteten Pfaden in G_y erreichbar sind. Falls $R_B \cap Z_y \neq \emptyset$, dann liegt ein M-augmentierender Weg in G_y vor; das Matching wird augmentiert. Sei M nun das augmentierte Matching. Falls $R_B \cap Z_y = \emptyset$, dann setze $\Delta := \min\{c(\{i, j\}) - y(i) - y(j) \colon i \in Z_y \cap A, j \in B \setminus Z_y\} > 0$. Setze $y'(i) := y(i) + \Delta$, $\forall i \in Z_y \cap A$, und $y'(i) := y(i) - \Delta$, $\forall i \in Z_y \cap B$. Es ist leicht zu zeigen, dass y' ein Potential ist und der Graph $G_{y'}$ das Matching M beinhaltet.

    Alle Kanten in $E(G_{y'}) \setminus E(G_y)$ werden von A nach B orientiert. Sei $Z_{y'}$ die Menge der Knoten in $G_{y'}$, die von R_A aus entlang gerichteten Pfaden erreichbar sind. Es kann gezeigt werden, dass $Z_y \subset Z_{y'}$ und $Z_y \neq Z_{y'}$ gelten. Ersetze y durch y' und Z_y durch $Z_{y'}$.
    Der allgemeine Iterationsschritt wird mit dem aktuellen Matching M und dem aktuellen Potential y wiederholt, bis M ein perfektes Matching ist.

    Zeigen Sie: Bei Terminierung des Algorithmus ist M das gesuchte perfekte Matching mit minimalem Gewicht.

(c) Wenden Sie die Ungarische Methode an, um ein perfektes Matching mit minimalem Gewicht in einem vollständigen bipartiten Graphen mit 5 Knoten in jeder Seite der Partition und folgenden Kantengewichten $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ zu bestimmen:

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 7 & 15 & 4 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 \\ 9 & 6 & 12 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 14 & 6 & 10 \\ 9 & 6 & 12 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

(d) Analysieren Sie die Zeitkomplexität der Ungarischen Methode aus (b).

38. Zeigen Sie: Sei $r \geq 1$ und $G = (A \cup B, E)$ ein r-regulärer bipartiter Graph, d.h. ein bipartiter Graph in dem jeder Knoten Grad r hat ($\deg(v) = r$, $\forall v \in V(G)$). Dann lässt sich die Kantenmenge E in r disjunkte perfekte Matchings partitionieren.

39. Gegeben sei ein bipartiter Graph $G = (U \dot\cup V, E)$ mit $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ und $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ mit Hilfe der Adjazenzmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h. $\{u_i, v_j\} \in E \iff a_{i,j} = 1$. Geben Sie ein Matching mit maximaler Kardinalität an. Verwenden Sie dieses Matching um eine minimale Knotenüberdeckung zu bestimmen.

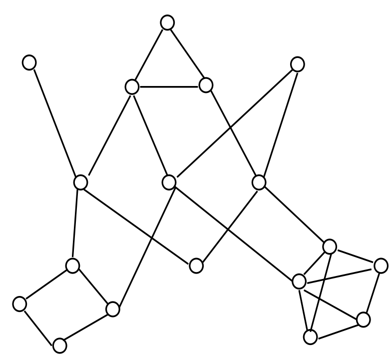

Abbildung 1: Graph für Aufgabe 34.