Kombinatorische Optimierung 2, WS 2018-2019

2. Übungsblatt

9. Berechnen Sie unter Verwendung des Algorithmus von Dijkstra die kürzesten Wege von s zu allen anderen Knoten im Graphen in Abbildung 1 ohne Berücksichtigung der Kantenorientierung.

10. Modifizieren Sie Dijkstras Algorithmus um das Bottleneck-Wege-Problem zu lösen: Für einen gegebenen Digraph G mit Gewichten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_+$ und zwei Knoten $s, t \in V(G)$ sei ein s-t-Weg gesucht, dessen längste Kante so kurz wie möglich ist.

11. Bestimmen Sie mit dem Moore-Bellman-Ford Algorithmus den kürzesten Weg von s zu allen Knoten im gerichteten Graphen in Abbildung 2.
Was passiert, wenn Sie die Länge der Kante $(2, 3)$ auf 4 setzen? Testen Sie den Algorithmus auch für diesen Fall!

12. Bestimmen Sie mit Hilfe des Floyd-Warshall Algorithmus die kürzesten Wege zwischen allen Knotenpaaren und deren Längen für den Graphen in Abbildung 3.

13. Gegeben sei ein Digraph mit konservativen Gewichten. Zeigen Sie, dass ein Kreis mit minimalem Gesamtgewicht in polynomieller Zeit bestimmt werden kann. Kann eine Laufzeit von $O(n^3)$ erreicht werden?

    Hinweis: Modizieren Sie den Algorithmus von Floyd und Warshall.

    Bemerkung: Für allgemeine Gewichte enthält das Problem die Entscheidung, ob ein gegebener Digraph hamiltonsch ist (und ist somit NP-schwer, siehe Kapitel 15 in Korte und Vygen [1]). Die Lösung des Problems im Fall von ungerichteten Graphen mit konservativen Gewichten wird in Abschnitt 12.2 in [1] behandelt.

14. Gegeben sei ein Digraph G mit konservativen Gewichten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}$ und zwei Knoten $s, t \in V(G)$. Angenommen es gibt nur einen kürzesten s-t-Weg P. Kann man dann den kürzesten s-t-Weg abgesehen von P in polynomieller Zeit bestimmen?

15. Kürzeste Wege in azyklischen Graphen.

    Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $n := |V|$. Eine topologische Sortierung in G ist eine bijektive Abbildung $f\colon V \to \{1, 2, \ldots, n\}$ mit der Eigenschaft $f(i) < f(j)$ für alle $(i, j) \in E$. Es gilt folgende Äquivalenz: Es gibt eine topologische Sortierung in G dann und nur dann wenn G keine gericheteten Kreise enthält. In diesem Fall heißt G *kreisfrei* oder *azyklisch* (in Englisch "directed acyclic graph" (DAG)). Mit Hilfe der Tiefensuche kann eine topologische Sortierung eines Graphen G in $O(|V(G)|+|E(G)|)$ gefunden werden, falls eine solche exitiert. Ansonsten wird ein Kreis in G entdeckt[1]. (Ein Beweis der Äquivalenz bzw. eine Beschreibung des Algorithmus sind in Kapitel 2 von Korte und Vygen [1] angegeben, diese gehören jedoch nicht zur Lösung dieses Beispiels.)

    (a) Geben Sie einen Algorithmus an, der im Falle von azyklischen Graphen die kürzesten Wege von einer Quelle aus zu allen anderen Knoten und deren Längen in linearer Zeit bestimmt. Dazu kann zB. der Moore-Bellman-Ford Algorithmus modifiziert werde.

    (b) Betrachten wir nun das sogenannte Längste-Wegeproblem: Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und zwei Knoten $s, t \in V$. Gesucht sei der längste s-t-Weg in G. Können Sie für dieses Problem einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit angeben? Wie lautet die Antwort der obigen Frage wenn der Inputgraph $G = (V, E)$ azyklisch ist?

[1] Somit liegt auch ein linearer Algorithmus zur Erkennung von azyklischen gerichteten Graphen vor.

16. Betrachten Sie den gerichteten Graphen in Abbildung 2 und verringern Sie das Gewicht jeder Kante um 2.

    (a) Bestimmen Sie (nicht durch kompleter Enumeration aller Kreise) ob dieser Graph einen negativen Kreis enthält.

    (b) Bestimmen Sie einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Gewicht in diesem Graphen.

17. Die Arboreszenz der kürzesten Wege
    Sei G ein Digraph mit Gewichten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}$ und ein Knoten $s \in V(G)$. Ein Knoten v heißt *von s aus erreichbar in G* wenn es einen (gerichteten) s-v-Weg P_v in G gibt. Eine Arboreszenz A mit Wurzel s heißt *Arboreszenz der kürzesten Wege von s aus in G* dann und nur dann wenn (i) $V(A)$ enthält alle von s aus erreichbaren Knoten in G, und (ii) der eindeutiger s-v-Weg in A ist ein kürzester s-v-Weg in G, für alle $v \in V(A) \setminus \{s\}$.

    (a) Sei die Gewichtsfunktion c konservativ. Ziegen Sie, dass in diesem Fall eine Arboreszenz der kürzesten Wege von s aus für jeden Knoten $s \in V(G)$ existiert. Ist die Arboreszenz der kürzesten Wege von s aus in G eindeutig?

    (b) Sei jeder Knoten $v \in V(G)$ von s aus erreichbar in G und seien die Gewichte $c(e) \geq 0$, $\forall e \in E(G)$. Sei A_P eine Arboreszenz der kürzesten Wege von s aus in G und sei A_S eine spannende Arboreszenz mit Wurzel s und minimalem Gewicht in G (d.h. unter allen Arboreszenzen mit Wurzel s in G hat A_S das klienste Gesamtgewicht). Zeigen Sie, dass $c(A_P) \leq (|V(G)| - 1)c(A_S)$ gilt.

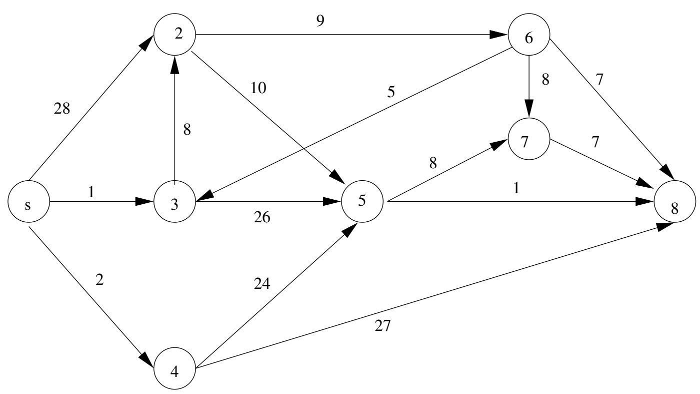

Abbildung 1: Beispiel 9

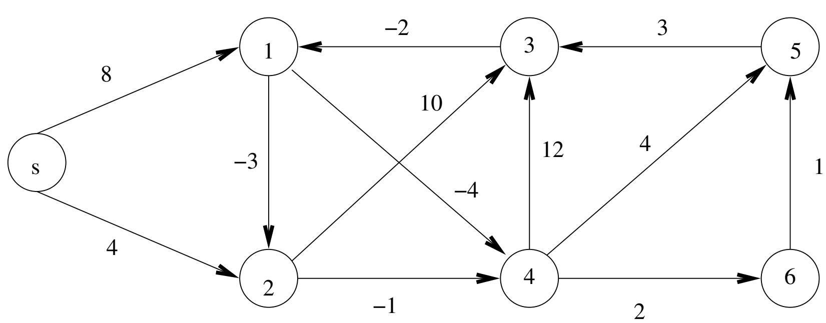

Abbildung 2: Beispiel 11und 16

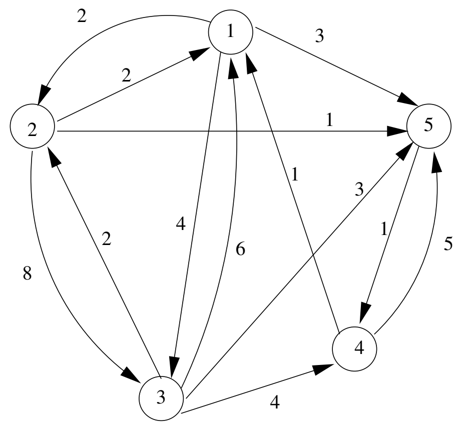

Abbildung 3: Beispiel 12

Literatur

[1] B. Korte und J. Vygen, *Kombinatorische Optimierung: Theorie und Algorithmen*, Springer, 2012, ebook: `https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-25401-7`.