Diskrete Mathematik, WS 2017/2018, 7. Übungsblatt

42. Sieben Mathematikstudenten fahren in die Ferien. Jeder von Ihnen schreibt Ansichtskarten an drei seiner sechs Kollegen. Ist es möglich, dass jeder Student genau von denjenigen Kollegen eine Karte bekommt, denen er geschrieben hat?

43. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie, dass die folgenden zwei Aussagen äquivalent sind:

    (1) G ist ein Baum.

    (2) G ist maximal azyklisch, d.h. G ist kreisfrei und das Hinzufügen einer beliebigen zusätzlichen Kante zerstört die Kreisfreiheit von G.

44. (a) Als Gradfolge eines Graphen bezeichnet man die aufsteigend sortierte Folge seiner Knotengrade. Die Gradfolge eines Baumes sei $1, \ldots, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. *Wieviele Blätter* besitzt der Baum? (Ein *Blatt* ist ein Knoten mit Grad 1 in einem Baum.)

    (b) Bestimmen Sie alle Bäume mit n Knoten, die genau 2 Blätter besitzen.

    (c) Zeigen Sie: Ein Baum $T = (V, E)$ mit $|V| \geq 2$ hat genau

    $$2 + \sum_{v \in V:\ \deg(v) \geq 3} (\deg(v) - 2)$$

    viele Blätter.

45. Das Komplement eines Graphen $G = (V, E)$ ist der Graph $G^C = (V, E')$, wobei E' genau jene Kanten enthält, die nicht in E vorkommen. Bestimmen Sie alle Bäume, deren Komplement nicht zusammenhängend ist.

46. Sei T ein Baum auf n Knoten, in dem kein Knoten Grad 2 hat. Zeigen Sie, dass für die Länge d eines längsten Pfades in T die Ungleichung $d \leq \frac{n}{2}$ gilt. (Die Länge eines Pfades $(v_0, v_1, \ldots, v_l)$ ist die Anzahl l der Kanten im Pfad.)

47. Das Sperner'sche Lemma (Sperner 1928)

    (a) Das Sperner'sche Lemma in einer Dimension: Die Knoten des Weges $P_n = (V, E)$, wobei $V = \{0, 1, \ldots, n\}$, $E = \{\{i, i-1\} \mid i = 1, \ldots, n\}$, sind mit zwei Farben gefärbt, wobei die Knoten 0 und n unterschiedliche Farben haben.
    Zeigen Sie: Die Anzahl der Kanten, deren Endknoten zwei verschiedene Farben haben ist ungerade.

    (b) Sei ein Dreieck mit den Ecken A_1, A_2, A_3 in der Ebene gegeben. Dieses Dreieck wird nun auf beliebige Weise in endlich viele kleine Dreiecke unterteilt, wobei keine Ecke eines Dreiecks auf einer Kante eines der anderen kleineren Dreiecke liegen darf. Eine solche Zerlegung heit Triangulierung.
    Seien die Ecken des großen und der kleineren Dreiecke mit den Zahlen 1,2,3 markiert wobei folgende Regel erfüllt ist: Die Ecke A_i erhält die Markierung i, $i = 1, 2, 3$; und alle Ecken, die auf der (großen) Dreiecksseite zwischen A_i und A_j liegen, erhalten als Markierung entweder i oder j. Ein Beispiel ist in Abbildung 1 gegeben.
    Zeigen Sie: Die Anzahl der dreieckigen Flächen, deren Ecken mit paarweise verschiedenen Zahlen markiert sind ist ungerade.
    Hinweis: Konstruieren Sie einen Graphen wie folgt: Zeichnen Sie ins Innere jeder dreieckigen Fläche einen Knoten und einen zusätzlichen Knoten außerhalb des großen Dreiecks. Verbinden Sie zwei Knoten, wenn die entsprechenden Flächen in der ursprünglichen Zeichnung benachbart sind und die beiden gemeinsamen Knoten mit 1 und 2 markiert sind.
    Wie kann man an diesem Graphen erkennen, ob ein Dreieck die im Sperner'schen Lemma gewünschte Eigenschaft hat? Welchen Grad hat der „äußere Knoten"?

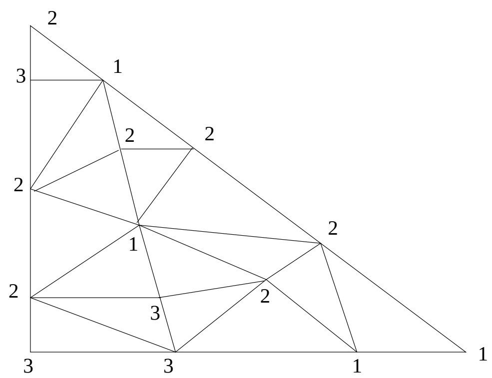

Abbildung 1: Beispiel einer Triangulierung