Diskrete Mathematik, WS 2017/2018, 12. Übungsblatt

71. Beweisen Sie, dass für p prim, $p \geq 5$, gilt: $p^2 - 1$ ist durch 24 teilbar.

72. Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen p mit $p \equiv 3 \pmod 4$ gibt.

    Hinweis: Führen Sie den Beweis via Widerspruch durch. Betrachten Sie zuerst eine Zahl n, die als Produkt von ungeraden Zahlen dargestellt werden kann, und charakterisieren Sie die Fälle $n \equiv 3 \pmod 4$ und $n \equiv 1 \pmod 4$.

73. Zeigen Sie, dass die Zahl
$$5^{2n+1}2^{n+2} + 3^{n+2}2^{2n+1}$$
    für alle $n \in \mathbb{N}$ von 19 geteilt wird.

74. Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^2 + 7y^9 + 1 = 0$ mit $x,\, y \in \mathbb{Z}$ keine Lösung besitzt.

    Hinweis: betrachten Sie die Gleichung modulo 7.

75. Bestimmen Sie (natürlich ohne Computer) die beiden letzten Ziffern (von hinten) in der Dezimaldarstellung der Zahl
$$7^{7^{7^7}} - 7^{7^7}.$$
    Dabei sind $7^{7^{7^7}}$ als 7^y mit $y = 7^{7^7}$ und 7^{7^7} als 7^x mit $x = 7^7$ zu verstehen.

    Hinweis: Nutzen Sie, dass $7^4 \equiv 1 \pmod{100}$ gilt.