

Diskrete Mathematik, WS 2017/2018, 10. Übungsblatt

60. Zeigen Sie: Ist $G = (V, E)$ ein k -regulärer Graph mit $|V| = n$, dann gilt $\chi(G) \geq \lceil \frac{n}{n-k} \rceil$
61. Sei $T = (V, E)$ ein Baum mit $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ and $|V| = n > 1$. Zeigen Sie, dass es $k(k-1)^{n-1}$ Möglichkeiten gibt, die Knoten von T mit k Farben zulässig zu färben. D.h. es gilt zu zeigen, dass für $k \in \mathbb{N}$ die Anzahl der unterschiedlichen Abbildungen $f: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ für die $f(v_i) \neq f(v_j)$ gilt, falls $v_i, v_j \in V$, $\{v_i, v_j\} \in E$, gleich $k(k-1)^{n-1}$ ist.
62. Eine (zulässige) *Kantenfärbung mit k Farben* ($k \in \mathbb{N}$) in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $f: E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ so, dass für alle Paare von Kanten $e_1, e_2 \in E$, die einen gemeinsamen Endknoten haben (d.h. $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$), $f(e_1) \neq f(e_2)$ gilt. Der *chromatische Index* $\chi'(G)$ eines Graphen $G = (V, E)$ ist die kleinste natürliche Zahl k , für die eine (zulässige) Kantenfärbung mit k Farben existiert.
- Bestimmen Sie die chromatische Zahl (vgl. Vorlesung) und den chromatischen Index des Petersen Graphen (Eine Abbildung des Petersen Graphen ist im 9. Übungsblatt enthalten).
- Hinweis: Sie können den folgenden Satz von Vizing verwenden: Für jeden Graphen $G = (V, E)$, gilt $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$, wobei $\Delta(G)$ der maximale Knotengrad in G ist, d.h. $\Delta(G) := \max\{\deg(v) : v \in V\}$.
63. Beweisen oder widerlegen Sie:
- Ein Baum enthält höchstens ein perfektes Matching!
 - Enthält ein zusammenhängender, drei-regulärer Graph ein perfektes Matching, so enthält er auch einen Hamiltonschen Kreis!
64. Für einen Graphen G sei $\delta(G) := \min\{\deg(v) : v \in V(G)\}$ der Minimalgrad von G . Beweisen Sie, dass $\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(G') : G' \text{ ist Teilgraph von } G\}$ gilt.
- Hinweis: Induktion über die Anzahl $|V(G)|$ der Knoten. Beim Induktionsschritt entfernen Sie einen Knoten mit minimalem Grad aus dem Graphen.