Graz University of Technology

Department of Mathematical Structure Theory

Mathematik A für Elektrotechnik
Übungsbeispiele – WS 2009/10

Inhaltsverzeichnis

1 Reelle Zahlen 2

2 Induktion 2

3 Die komplexen Zahlen 3

4 Folgen 3

5 Reihen 4

6 Elementare Funktionen 5

7 Grenzwerte, Stetigkeit 7

8 Vektorräume 8

9 Matrizenrechnung 9

10 Differentialrechnung 11

1 Reelle Zahlen

1. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die jeweiligen Ungleichungen gelten: (je 2 Pkt.)

   (a) $0 \leq |x-6| - |x| \leq 6$ (b) $x^2 - |x| - 2 < 0$ (c) $\dfrac{x+1}{|x-1|+1} > 1$

   (d) $||x-2|-3| < 4$ (e) $|x-a| + |x-b| \leq b-a$, wobei $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

2. (a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y > 0$ gilt: (2 Pkt.)

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$

   (b) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: (3 Pkt.)

$$\frac{x+y}{|x+y|+1} \leq \frac{|x|}{|x|+1} + \frac{|y|}{|y|+1}.$$

3. Zeigen Sie, dass es keine rationale Zahl $d \in \mathbb{Q}$ gibt, welche die Gleichung $d^3 = 5$ erfüllt. (3 Pkt.)

4. Bestimmen Sie – falls existierend – das Supremum und das Infimum der nachfolgenden Mengen reeller Zahlen. Sind diese auch Maxima und Minima? (je 3 Pkt.)

   (a) $\{\, x \mid x = 3 + \frac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N} \,\}$ (b) $\{\, x \mid x = (2^n)^{-n},\ n \in \mathbb{N} \,\}$

   (c) $\{\, x \mid x = 1 + \frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N} \,\}$ (d) $\{x \in \mathbb{Q} \mid (x-2)^2 \leq 6\}$

   (e) $\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z},\ n > m \geq 1\}$ (f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{m-2n}{m+n}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0\}$

   (g) $\{\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \mid x, y \in \mathbb{R},\ x, y \geq 1\}$ (h) $\{x + \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{Q},\ \frac{1}{2} < x \leq 2\}$

2 Induktion

5. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: (a,b: 2 Pkt.) (c-f: 3 Pkt.)

   (a) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (b) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ (d) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

   (e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^n \cdot 3^k = 2^{n-1} \cdot (3^{n+1} - 1)$ (f) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$

6. Beweisen Sie, dass für $r \neq 1$: (4 Pkt.)

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

7. Finden Sie eine Formel für die folgenden Ausdrücke und beweisen Sie sie: (je 4 Pkt.)

   (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = 1 + 3 + \ldots + (2n-1)$

   (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2 = 1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2$

   (**Hinweis:** Man betrachte die Ausdrücke $1 + 2 + \ldots + 2n$ bzw. $1^2 + 2^2 + \ldots + (2n)^2$.)

8. Beweisen Sie folgende Aussage mittels vollständiger Induktion: (3 Pkt.)

   Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: 3 teilt $2 \cdot 4^{n-1} + 1$.

3 Die komplexen Zahlen

9. Berechnen Sie (je 3 Pkt.)

   (a) $\left|\dfrac{3+4i}{2-5i}\right|$ (b) $\left|\dfrac{(1+2i)^5}{i^7(2+3i)^2}\right|$ (c) $\left|\dfrac{i^3(2+i)^2}{(3+i)(2+i)(1+2i)}\right|$

10. Stellen Sie in Polarkoordinaten dar: (a,b: 2 Pkt.) (c,d: 3 Pkt.)

    (a) $3+3i$ (b) $\dfrac{1+i}{1-i}$ (c) $\dfrac{i\sqrt{2}}{4+4i}$ (d) $\dfrac{2+3i}{5+4i}$

11. Berechnen Sie die folgenden Wurzeln und stellen Sie sie in der komplexen Zahlenebene dar: (je 3 Pkt.)

    (a) $\sqrt{1+i}$ (b) $\sqrt[4]{-4}$ (c) $\sqrt[3]{-2i}$ (d) $\sqrt[5]{3}$

12. Berechnen Sie: (je 2 Pkt.)

    (a) $(2+3i)^{16}$ (b) $(2+i\sqrt{5})^{11}$

13. Zeigen Sie, dass $\bar{z}^2 = z^2$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$. (2 Pkt.)

14. Seien $y, z \in \mathbb{C}$ mit $|y| = |z| = 1$. Zeigen Sie, dass $|yz| = 1$ und dass $|y^{-1}| = 1$. (2 Pkt.)

15. Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie (a) $\Re(\frac{\bar{z}}{2z})$ und (b) $\Im(i/z^2)$. (3 Pkt.)

4 Folgen

16. Untersuchen Sie folgende Folgen auf Monotonie und Konvergenz, und geben Sie (außer bei Beispiel (e)) die Häufungspunkte an ($n \in \mathbb{N}$). (a,b: 3 Pkt.) (c-g: 4 Pkt.)

    (a) $a_n = (-1)^n \cdot (n^2 - 1)$ (b) $a_n = \dfrac{4n^2 + 2n - 3}{2n^2 - n + 1}$ (c) $a_n = \dfrac{(n+i)^2 - 2ni}{n^2 + 1 - i}$

    (d) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n^2+c} - \sqrt{n^2-c} + 1\right)}$, $(c > 0)$ (e) $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$

    (f) $a_n = \dfrac{1}{2^{(n+1)/2}} \cos n^2\pi + i \cdot (-1)^n \dfrac{2n-1}{n+2}$, $(i = \sqrt{-1}!)$ (g) $a_n = \dfrac{(n-1)(n+3)}{n+1} - \dfrac{n^3}{n^2-1}$

17. Gegeben ist die Folge $\{a_n\}$ mit $a_n = \dfrac{2n^2}{4n^2+n}$. Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge $\{a_n\}$. Für $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 0.5$, $\varepsilon = 10^{-2}$ und $\varepsilon = 10^{-4}$ bestimme man die kleinste Zahl $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt. (4 Pkt.)

18. Zeigen Sie, dass die Folge (4 Pkt.)
    $$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{n+1}$$
    fallend und beschränkt ist.
    Hinweis: Verwenden Sie die Bernoulli-Ungleichung.)

19. Ermitteln Sie das Bildungsgesetz (Rekursion) der Folge $\{a_n\}$ deren Glieder wie folgt ermittelt werden: $a_1 = a_2 = 1$ und alle weiteren Folgenglieder ergeben sich als Quadratwurzel aus der Summe der beiden unmittelbaren Vorgänger des zu ermittelnden Folgengliedes in der Folge $\{a_n\}$. Geben Sie ferner die ersten 6 Folgenglieder an. Zeigen Sie, dass die Folge monoton wachsend und beschränkt ist. Welchen Grenzwert besitzt die Folge? (4 Pkt.)

20. Man beweise: Die rekursiv definierte Folge $\{a_n\}$ mit $a_1 = \dfrac{1}{6}$, $a_{n+1} = a_n^2 + \dfrac{1}{5}$ ist monoton wachsend und beschränkt. Man bestimme ihren Grenzwert. (4 Pkt.)

21. Zeigen Sie, dass die folgenden rekursiv gegebenen Folgen konvergieren und bestimmen Sie ihren Grenzwert: (je 4 Pkt.)

(a) $a_1 = 3; \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{3+a_n^2}$ (b) $a_1 = 2; \quad a_{n+1} = \sqrt{6+5a_n}$

(c) $a_1 = 4; \quad a_{n+1} = \sqrt{4+\dfrac{1}{2}a_n^2}$ (d) $a_1 = 1, a_2 = 2; \quad a_{n+2} = \dfrac{1}{3}a_{n+1} + \dfrac{1}{2}a_n.$

22. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ der Folge (je 3 Pkt.)

$$(a)\ a_n = \frac{(-1)^n\sqrt{n}\cos(n^2)}{3n+2}$$

$$(b)\ a_n = \frac{3n+2\sin(n^3/2)\cos^n(2n+1)}{4n+5}$$

23. Zeigen Sie, dass die rekursiv gegebene Folge nicht konvergiert: (3 Pkt.)

$$a_1 = 1, a_2 = 2; \quad a_{n+2} = \frac{2}{3}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n.$$

24. Berechnen Sie das Konvergenzverhalten folgender Folge:

$$a_n = \frac{e^{i(n^2+2n)\pi}}{1-2i}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Formel von Euler.

5 Reihen

25. Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und bzw. absolute Konvergenz: (3 Pkt.)

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n+2)\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)}{2n^2}$$

26. Zeigen Sie mit Hilfe des Vergleichskriteriums das Konvergenzverhalten folgender Reihen: (je 3 Pkt.)

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3n - 1}{2^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2+1}(n+1)}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\sqrt{n^2-n+3}}{3^{n/2}\sqrt{n^2+4}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+(-1)^n}{n^2+3\ln(n)}$

27. Untersuchen Sie mit Hilfe des Wurzel- oder Quotientenkriteriums das Konvergenzverhalten folgender Reihen: (je 3 Pkt.)

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{(n-1)!}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^n}{3^n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + (-1)^n\frac{1}{4}\right)^n.$

28. Untersuchen Sie die Konvergenz bzw. die absolute Konvergenz folgender Reihen: (je 3 Pkt.)

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+1)}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{3n}}{(3n-1)!}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n+1}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n+1)!}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[5]{2n+1}}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3 5^n}$ in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos(n+1)+(-1)^n}{2^{n-1}}$

29. Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{2^n}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ konvergiert. (3 Pkt.)

30. Bestimmen Sie die Summenwerte der folgenden Reihen: (je 3 Pkt.)

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{8}{5^n}+\frac{9}{8^n}-\frac{2}{3^n}\Big]$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{2}{4^{n/2}}-3\cdot\frac{4^n}{n!}\Big]$

31. Zeigen Sie, dass folgende Reihe konvergiert und bestimmen Sie deren Summenwert: (3 Pkt.)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+3)}$$

Hinweis: Schreiben Sie $\frac{1}{k(k+3)}$ als $\frac{a}{k}+\frac{b}{k+3}$ mit $a,b\in\mathbb{R}$.

6 Elementare Funktionen

32. Fassen sie nachfolgende Funktionen als Funktionen von $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ auf und untersuchen Sie diese auf Injektivität, Surjektivität, Bijektivität, Beschränktheit und Monotonie. Es reicht fürs erste, wenn Sie die Eigenschaften feststellen; Sie müssen sie nicht beweisen. Stellen Sie weiters den Definitionsbereich der Funktion fest und zeichnen Sie den Graphen der Funktion. (je 3 Pkt.)

(a) $f(x)=2x^5-4$ (b) $f(x)=x^3+\sqrt{x+2}$ (c) $f(x)=2x^4+\sqrt{2-3x^2}$

(d) $f(x)=2x-\sqrt{x^2-4}$ (e) $f(x)=\frac{1}{x^2-2}$ (f) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(g) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2}$ (h) $f(x)=-x^3+4$ (i) $f(x)=\dfrac{4}{x^2+2}$

33. Für die Funktionen $f(x)=\frac{1-x}{x-2}$ bestimme man den maximalen Definitionsbereich und den zugehörigen Bildbereich, die Intervalle, auf denen f monoton wächst und fällt und die Intervalle, auf denen $f(x)<0$ ist. (3 Pkt.)

34. Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck, bestimmen Sie dann den maximalen Definitionsbereich (in $\mathbb{R}$), und skizzieren Sie den Graphen: (4 Pkt.)

$$f(x)=\left(\frac{\left(\sqrt{x^3}-\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{x+\sqrt{2x}+2}\right)^2+\sqrt{\left(x^2+2\right)^2-8x^2}.$$

35. Welche der nachfolgenden Funktionen hat auf dem Definitionsintervall $[-2,2]$ eine inverse Funktion? Wie lautet diese? (Skizze!) (je 2 Pkt.)

(a) $f(x)=x^4-1$ (b) $f(x)=-x^3+5$

(c) $f(x)=\sqrt{2x+3}$ (d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

36. Überprüfen Sie, ob folgende Funktionen inverse Funktionen besitzen, und berechnen Sie ggf. diese: (je 2 Pkt.)

(a) $f:(1,\infty)\to(0,\infty)$ mit $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

(b) $g:(-\infty,2)\to(-1,\infty)$ mit $g(x)=\dfrac{x}{|x-2|}$

37. Es sei $f(x)=x-2$ und $g(x)=(x+1)^2-2$. Berechnen Sie $f+g$ und $f-g$ und zeichnen Sie die entsprechenden Graphen. Ermitteln Sie die Verknüpfungen $f\circ g$ und $g\circ f$. (3 Pkt.)

38. Es sei $f(x)=-x^2+2$, $g(x)=x^3-\sqrt{x}+3$. Bestimmen Sie $f\circ g$ und $g\circ f$. (2 Pkt.)

39. Werten Sie mit Hilfe des Hornerschemas folgende Polynome an den gegebenen Stellen aus: (je 2 Pkt.)

(a) $p_1(x)=x^7-2x^6-8x^5-2x^4+8x^3+2x^2+2$; gesucht ist $p_1(4)$.

(b) $p_2(x)=x^9-4x^8+10x^6-8x^4+x^3+x^2-x+1$; gesucht ist $p_2(2)$.

(c) $p_3(x)=x^6-5x^5-x^4+6x^3-2x^2-12x-20$; gesucht ist $p_3(5)$.

40. Man berechne mit Hilfe des Hornerschemas: (je 3 Pkt.)

(a) Für das Polynom $p(x) = x^6 + x^5 - 18x^4 + 19x^3 - 10x + 3$ berechne man $p(3)$ sowie $p(x)/(x-3)$.

(b) Für das Polynom $p(x) = 2x^7 + 13x^6 + 21x^5 + 30x^4 - 5x^3 - 33x^2 - 36x + 20$ berechne man $p(-5)$ sowie $p(x)/(x+5)$.

41. Gegeben sei das Polynom $p(x) = x^5 - 6x^4 - 38x^3 + 192x^2 + 325x - 1050$, von dem man weiß, dass es ausschließlich ganze Zahlen als Nullstellen besitzt. Bestimmen Sie mit Hilfe des Vietaschen Wurzelsatzes diese Nullstellen. (4 Pkt.)

42. Bestimmen Sie zu folgenden Daten die zugehörigen Interpolationspolynome (a: je 2 Pkt.) (b: je 3 Pkt.)

x_i	-3	0	1	2	3
$p_1(x_i)$	0	2	0	-1	1
$p_2(x_i)$	1	-1	0	1	0
$p_3(x_i)$	6	0	3	1	0

mit Hilfe der (a) Lagrangeschen Interpolationsformel, (b) des Newton-Verfahrens.

43. Einer Wertetafel entnimmt man (je 3 Pkt.)

x	0	1	2	3
$f_1(x)$	1	-1	2	5
$f_2(x)$	-1	2	1	0

Berechnen Sie die Werte der zugehörigen Interpolationspolynome an den Stellen -1 und 5 mit Hilfe des Hornerschemas.

44. Mittels Polynomdivision bestimme man den ganzen Anteil von (je 2 Pkt.)

(a) $\dfrac{x^6 + 2x^5 - 3x^4 + x - 1}{x^2 - 2x + 3}$ (b) $\dfrac{x^8 + 2x^7 - 3x^5 + 2x^4 - x^3 + x - 3}{x^3 - 2x^2 - x - 1}$

45. Werten Sie mit Hilfe des Hornerschemas folgende Polynome an den gegebenen Stellen aus: (je 2 Pkt.)

(a) $p_1(x) = x^7 - 2x^6 - 8x^5 - 2x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 2$; gesucht ist $p_1(-4)$.

(b) $p_2(x) = x^9 - 4x^8 + 10x^6 - 8x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$; gesucht ist $p_2(-2)$.

(c) $p_3(x) = x^6 - 5x^5 - x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 12x - 20$; gesucht ist $p_3(2)$.

46. Man berechne mit Hilfe des Hornerschemas: (je 3 Pkt.)

(a) Für das Polynom $p(x) = x^6 - 3x^5 - 9x^4 + 27x^3 + x^2 - 7x - 30$ berechne man $p(2)$ sowie $p(x)/(x-2)$.

(b) Für das Polynom $p(x) = x^6 - 3x^5 - 9x^4 + 27x^3 + x^2 - 7x - 30$ berechne man $p(-3)$ sowie $p(x)/(x+3)$.

47. Mittels Polynomdivision bestimme man den ganzen Anteil von (je 2 Pkt.)

(a) $\dfrac{2x^6 + 2x^5 - 4x^4 + x^3 - 1}{x^3 - 6}$ (b) $\dfrac{x^6 - 1x^5 - 2x^4 + 3x - 5}{x^2 + x - 2}$

48. Zur Darstellung elektrostatischer Potentiale benötigt man die LEGENDRE-Polynome $P_n(x)$, die rekursiv definiert sind durch$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ und $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Bestimmen Sie explizit P_2, P_3, P_4 und P_5. Berechnen Sie mit Hilfe des Hornerschemas daraus $P_5(5)$. (4 Pkt.)

49. Berechnen Sie die Partialbruchdarstellung der folgenden rationalen Funktionen mit Hilfe der Einsetzmethode: (je 4 Pkt.)

(a) $\dfrac{x^2 + 3x - 1}{x^2\,(x^2+1)}$ (b) $\dfrac{2x^5 + 11x^4 + 3x^3 - 19x^2 - 16x - 12}{(x+1)^2(x^2-3)^2}$ (c) $\dfrac{3x^4 - 8x^3 - 5x^2 + 9x - 8}{(x-2)^3(3x^2+1)}$

50. Berechnen Sie die Partialbruchdarstellung der folgenden rationalen Funktionen durch Koeffizientenvergleich: (je 4 Pkt.)

(a) $\dfrac{2x^2+2}{(x+1)(x^2-2x+1)}$ (b) $\dfrac{x^3-x^2-3x+4}{(x-1)^4}$ (c) $\dfrac{4x^5-4x^4-3x^2+2}{(x+1)^2(2x^2+1)^2}$

51. Bestimmen Sie in Abhängigkeit der Paramater a und b die reellen Lösungen der Gleichungen: (je 3 Pkt.)

(a) $ae^{-2x}+be^{-x}=0$ (b) $e^{2x}+ae^x-\ln e^{-a^2/4}=0$

(c) $(\ln(bx))^2+\ln x-(\ln b)^2=0 \quad (b>0)$

52. Beweisen Sie folgende Gleichungen: (a) $\cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x$ (a: 2 Pkt.)

(b) $(\cosh x+\sinh x)^n=\cosh nx+\sinh nx$ für alle $n\in\mathbb{N}$. (b: 3 Pkt.)

53. Berechnen Sie die Umkehrfunktion zu $f:\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}\to\mathbb{R}\setminus[-1,1]:x\mapsto\coth\,(2x-1)$. (3 Pkt.)

54. Drücken Sie $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ und $\cot x$ in $t=\tan\frac{x}{2}$ aus. (4 Pkt.)

55. Zeigen Sie folgende Gleichungen für zulässige $x\in\mathbb{R}$: (je 2 Pkt.)

(a) $\dfrac{1}{\sin x}=\cot x+\tan\dfrac{x}{2}$ (b) $\cos^2 x=\dfrac{\cos 2x}{1-\tan^2 x}$.

56. Vereinfachen Sie: (je 2 Pkt.)

(a) $\tan(\operatorname{arccot} x)$ für $x\in]0,\infty[$ (b) $\arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ für $|x|<1$

(c) $\arcsin\big(2x\sqrt{1-x^2}\big)$ für $x\in[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]$

57. Der Ausdruck $\arctan\dfrac{1+x}{1-x}-\arctan x$ hat für $x>1$ einen konstanten Wert. Man bestimme diesen. (4 Pkt.)

7 Grenzwerte, Stetigkeit

58. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (falls existent): (je 3 Pkt.)

(a) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4-2x^3-9x^2+2x+8}{x^2+6x+5}$ (b) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[3]{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$ (c) $\lim\limits_{x\to0}(x+1)\cos\dfrac{1}{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ (e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}$ (f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2x+1}{2x^3++x^2-4x-1}$

59. Bestimmen Sie zu folgenden Funktionen sämtliche Asymptoten: (je 3 Pkt.)

(a) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$ (b) $f(x)=\dfrac{2x^3+2x-1}{x^2-x-2}$

60. Bestimmen Sie die Definitionsbereiche und diejenigen Werte für x, an denen die folgenden Funktionen stetig, bzw. links- oder rechtsseitig stetig sind. Beheben Sie, falls möglich, Unstetigkeitsstellen. (je 3 Pkt.)

(a) $$f_1(x)=\begin{cases}-3 & \text{für } x=-2\\ 3 & \text{für } x=3\\ \frac{x^3-7x-6}{2^{1/x}(x^3+4x^2-11x-30)} & \text{sonst.}\end{cases}$$

(b) $$f_2(x)=\begin{cases}\sqrt{2} & \text{für } x=0\\ 3 & \text{für } x=9\\ 2 & \text{für } x=16\\ \frac{\sqrt{x(x+3)}-\sqrt{x(x+2)}-9\sqrt{x+3}-\sqrt{81(x+2)}}{x-7\sqrt{x}+12} & \text{sonst.}\end{cases}$$

61. Fällt Licht mit dem Einfallswinkel α auf einen Spalt, wird es gebeugt. Für die Intensität $f(\beta)$ des gebeugten Lichtes in Abhängigkeit vom Ausfallswinkel β (β ist die Abweichung von der Lotrichtung der Spaltebene) gilt folgende Formel: (3 Pkt.)

$$f(\beta)=\frac{\sin^2\left(k\left(\sin\alpha-\sin\beta\right)\right)}{\left(\sin\alpha-\sin\beta\right)^2}\qquad(\alpha\neq\beta)$$

Dabei ist $k=\frac{\pi a}{\lambda}$, wobei a die Spaltbreite und λ die Wellenlänge des Lichtes ist. Welche Art von Unstetigkeit hat die Funktion $f(\beta)$ an der Stelle $\beta=\alpha$?

62. Beweisen Sie, dass die Gleichung $e^x(2\ln x+1)=5$ im Intervall $(0.5,3)$ eine Lösung besitzt. Ist diese Lösung eindeutig? (3 Pkt.)

63. Bestimmen Sie numerisch mit Hilfe des Bisektionsverfahren die Nullstelle des Polynoms x^3+4x^2-5x-8 im Intervall $[1,2]$ bis auf eine Genauigkeit von $\epsilon=0.05$. (3 Pkt.)

64. Zeigen Sie die gleichmässige Stetigkeit mit Hilfe der Definition: (a) $f_1(x)=x^2+1$ für $2<x<3$ (b) $f_2(x)=\sqrt{x}$ für $x>1$ (je 3 Pkt.)

8 Vektorräume

65. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des $\mathbb{R}^n$? (je 3 Pkt.)

(a) $\{\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_1=0, x_n=c\},\ c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$
(b) $\{\vec{x} : x_1+x_2\geq 0\}$
(c) $\{\vec{x} : x_1x_n=0\}$
(d) $\{\vec{x} : x_1=0\}\cap\{\vec{x} : x_n=0\}$
(e) $\{\vec{x} : x_1=0 \text{ oder } x_n=0\}$
(f) $\{\vec{x} : \sum_{i=1}^n x_i=0\}$

66. Überprüfen Sie die folgenden Vektoren auf lineare Unabhängigkeit: (3 Pkt.)

$$\vec{v_1}=(1,\ 2,\ -3,\ 1),\quad \vec{v_2}=(1,\ 0,\ -4,\ 1),\quad \vec{v_3}=(-1,\ 4,\ 6,\ -1).$$

67. Für welche $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ sind die Vektoren $(\alpha,0,2)$, $(1,\beta,0)$, $(0,\alpha,1)$ linear abhängig? (4 Pkt.)

68. Für welche reellen Werte von β sind die drei Vektoren (3 Pkt.)

$$\vec{v_1}=(1,\ 2,\ 1),\quad \vec{v_2}=(\beta,\ 1,\ -1),\quad \vec{v_3}=(1,\ \beta,\ 1).$$

linear unabhängig? Berechnen Sie im Fall $\beta=2$ eine Basis des von drei Vektoren aufgespannten Untervektorraums und bestimmen Sie dessen Dimension.

69. Die Vektoren $\vec{u}=(1,2,3,-2)$, $\vec{v}=(2,-3,1,2)$, $\vec{w}=(-3,8,1,-6)$ erzeugen einen Unterraum U des $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die Dimension von U. (3 Pkt.)

70. Man stelle $\vec{x}=(3,2,3)$ als Summe zweier zueinander orthogonaler Vektoren dar, wobei die eine Komponente in Richtung des Vektors $\vec{y}=(1,0,1)$ weisen soll. (3 Pkt.)

71. Für welchen reellen Werte von α,β,γ sind die drei Vektoren (3 Pkt.)

$$\vec{v}_1=(1,\ \alpha,\ 2),\vec{v}_2=(0,\ 1,\ \beta),\vec{v}_3=(\gamma,\ 1,\ \beta).$$

linear abhängig? Es gelte ab jetzt $\alpha=\beta=\gamma=1$. Sind die beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ orthogonal zueinander? Projezieren Sie den Vektor $\vec{v}_3$ auf die vom Vektor $\vec{v}_1$ erzeugte Gerade.

72. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{x}=(0,1,1,0),\quad \vec{y}=(0,1,0,1),\quad \vec{z}=(0,1,1,1).$$

(a) Bestimmen Sie mittels des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis des von den Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ aufgespannten Unterraumes von $\mathbb{R}^4$. (4 Pkt.)

(b) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten der Vektoren $\vec{u}=(0,-1,0,1)$ und $\vec{v}=(0,0,-2,1)$ bezüglich der oben berechneten Orthonormalbasis. Wie lässt sich $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ mit Hilfe der Fourierkoeffizienten schnell berechnen? (3 Pkt.)

(c) Projezieren Sie die Vektoren $\vec{a}=(3,2,3,1)$ und $\vec{b}=(-1,0,4,2)$ auf den von $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ aufgespannten Unterraum. (2 Pkt.)

73. Bestimmen Sie für den von folgenden Vektoren aufgespannten Vektorraum eine Orthonormalbasis mit Hilfe der Gram-Schmidt-Orthogonalisierung: (3 Pkt.)

$$\vec{v_1}=(2,3,1)\quad \vec{v_2}=(4,1,3)\quad \vec{v_3}=(-1,3,7).$$

74. Berechnen Sie die Ebenengleichung zur Ebene (2 Pkt.)

$$(2,\ 1,\ 3)+\lambda(1,\ 0,\ 2)+\mu(-1,\ 1,\ 0).$$

75. Berechnen Sie jeweils eine Parameterdarstellung der Ebene, die durch folgende Gleichung gegeben ist: (je 2 Pkt.)

$$(a) \quad 3x - y + 2z = 4 \qquad\qquad (b) \quad 2x + y - 2z = 2$$

76. Unter welchem Winkel schneiden sich die Ebenen $x + 2z = 3$ und $2y + z = 1$? (2 Pkt.)

77. Welche der folgenden Behauptungen sind wahr? (Geben Sie für wahreAussagen einen Beweis an oder verweisen Sie auf einen Satz aus der Vorlesung und geben Sie für falsche Aussagen ein Gegenbeispiel an. Achten Sie genau auf die Voraussetzungen!) (4 Pkt.)

    (a) Der Nullvektor ist in jedem Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ enthalten.
    (b) Wenn $(n+1)$ Vektoren des $\mathbb{R}^n$ linear abhängig sind, dann ist einer der Vektoren der Nullvektor.
    (c) Je n Vektoren des $\mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig.
    (d) Sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig, so kann jeder dieser Vektoren als Linearkombination der beiden anderen dargestellt werden.

9 Matrizenrechnung

78. Welche der folgenden Abbildungen ist linear? Geben Sie ggf. die Matrixdarstellung der linearen Abbildung an. (je 2 Pkt.)

$$(a) \quad f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} i x_i, \qquad (b) \quad g(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad (c) \quad h(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{x_i} + x_i),$$

    (d) p sei die Projektion im $\mathbb{R}^2$ auf die Gerade, die durch den Vektor $(1,\ 1)$ gegeben ist.

79. Sei $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Funktion, welche jeden Punkt zuerst an der y-Achse spiegelt und dann um 60 Grad entgegen dem Uhrzeigersinn dreht. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von P. (3 Pkt.)

80. Drehen Sie das Dreieck $A = (3, 2), B = (3, 4)$ und $C = (1, 5)$ um 45° im mathematisch negativen Sinne (d.h. im Uhrzeigersinn) um den Ursprung. (2 Pkt.)

81. Welche geometrische Bedeutung hat die Koordinatentransformation $y = Ax$ mit (je 2 Pkt.)

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

82. Lösen Sie die folgenden homogenen Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{0}$ mit (je 3 Pkt.)

$$(a) \; A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b) \; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (c) \; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

83. Man löse folgende Gleichungssysteme in Abhängigkeit ihrer Parameter:

$$(a) \; A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ a & a^2 - 1 & 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \qquad (b) \; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & s \\ 1 & s & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

84. Lösen Sie die Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}$ mit (je 3 Pkt.)

$$(a) \; A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 8 & -5 \\ -3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 14 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad (b) \; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

85. Für welche Werte von k hat das lineare Gleichungssystem (4 Pkt.)

$$\begin{pmatrix} (k+1)x & + & y & + & kz & = & k+2 \\ x & + & 2ky & + & -kz & = & k-1 \\ 2x & + & ky & + & kz & = & -2 \end{pmatrix}$$

(a) eine eindeutige Lösung, (b) unendlich viele Lösungen bzw. (c) keine Lösung? Wenn Lösungen existieren, so sind diese in Abhängigkeit von k anzugeben.

86. Berechnen Sie $\det A$ für die Matrix (3 Pkt.)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

(a) durch Entwicklung nach der dritten Zeile.

(b) durch Entwicklung nach der zweiten Spalte.

(c) durch Transformation in Zeilennormalform.

87. Gegeben sei die Matrix$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \alpha & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ sowie der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. (4 Pkt.)

(a) Für welche Werte von α existiert die Inverse A^{-1}?

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ in Abhängigkeit von α!

88. Für welche reellen Werte von α besitzt folgendes Gleichungssystem (4 Pkt.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \alpha \\ 2 & \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) genau eine Lösung,

(b) keine Lösungen oder

(c) unendlich viele Lösungen?

Geben sie alle möglichen Lösungen an!

89. Berechnen Sie $\det A$ für (je 3 Pkt.)

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad (b)\ A = \begin{pmatrix} 2 & a+b & c \\ 1 & a & b+2c \\ 2 & b+c & a \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

90. Es seien $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie a so, dass das Gleichungssystem $AB\vec{x} = \vec{0}$ nichttrivial lösbar wird, und geben Sie die allgemeine Lösung an! (4 Pkt.)

91. Überprüfen Sie, ob folgende Matrizen invertierbar sind und berechnen Sie ggf. die inversen Matrizen: (je 3 Pkt.)

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b)\ A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad (c)\ A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

92. Lösen Sie das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit Hilfe der Cramerschen Regel, wobei (je 3 Pkt.)

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (b)\ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

93. Berechnen Sie zu folgenden Matrizen die Eigenwerte, ihre Eigenräume sowie ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten: (je 3 Pkt.)

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b)\ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (c)\ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

94. Finden Sie eine orthogonale Matrix T und eine Diagonalmatrix D, sodass $T^{-1}AT = D$, wobei (4 Pkt.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

10 Differentialrechnung

95. Prüfen Sie, ob die folgenden Funktionen differenzierbar sind: (je 2 Pkt.)

(a) $f_1(x) = \dfrac{|x+1|}{e^{x-1}}$ im Intervall $-2 \leq x \leq 2$

(b) $f_2(x) = x \cos|x|$ im Intervall $-1 \leq x \leq 1$

(c) $f_3(x) = \dfrac{\sin|x|}{\cos x}$ im Intervall $-1 \leq x \leq 1$.

96. Überprüfen Sie auf Differenzierbarkeit und berechnen Sie ggf. die Ableitung, wo vorhanden: (je 2 Pkt.)

$$(a)\quad f(x) = \begin{cases} x \sin x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad (b)\quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

97. Differenzieren Sie die Funktionen (je 3 Pkt.)

(a) $f_1(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{ax^2+x}}$ (b) $f_2(x) = \arctan\sqrt{\dfrac{\sin 2x}{\cos^2 x} - 1}$ (c) $f_3(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x+\cos x}{2-\tan x}}$

(d) $f_4(x) = (2x+1)^x$ (e) $f_5(x) = (x-1)^{(x+1)^x}$ (f) $f_6(x) = \left((x-1)^{x+1}\right)^x$

(g) $f_7(x) = (x^2+1)^{(3^x)}$ (h) $f_8(x) = \cosh x \cdot \sqrt{\dfrac{\tanh x}{x}}$

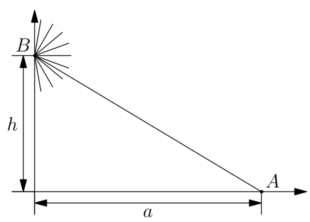
98. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte: (je 3 Pkt.)

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tanh x - \sinh x}{x - \sinh x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^{n+1}-3x}{e^{x+2}}, n \in \mathbb{N}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3-2x-5}{x^2-3} - \frac{x^2+2}{x+1}\right)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{e^x \cdot \sin x}{\ln(x+1)}}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} (\tan x)^{\cos x}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{3/2}(e^{1/x} - 1)$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} 3^{\frac{x^2}{1-e^{-x}}} + 3^{-\frac{x}{1-e^x}}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{5\cos x - \cos(5x)}{5\cot x - \cot(5x)}$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^3(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1} - 2x)$

99. Die Funktion $y(h) = h(a^2+h^2)^{-3/2}$, $(h \geq 0)$, gibt die Beleuchtungsstärke der Lampe B im Punkt A an. In welcher Höhe h ist B zu befestigen, damit es in A möglichst hell wird? (3 Pkt.)



100. Führen Sie auf rechnerischem Wege eine Kurvendiskussion der folgenden Funktionen durch (gehen Sie insbesondere auf die folgenden Punkte ein: Definitionsbereich, Stetigkeitsbereich, Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Monotonie, Krümmungsverhalten, Verhalten am Rande des Definitionsbereichs, Asymptoten) und fertigen Sie eine Skizze an: (je 4 Pkt.)

(a) $f(x) = \exp\left(\frac{|x^2-1|}{x-1}\right)$ (b) $f(x) = x\sqrt{-x^2-2x+3}$ (c) $f(x) = \frac{x+1}{\ln(x+1)}$

(d) $f(x) = \frac{|3x+1|}{2x+1}$ (e) $f(x) = \frac{x^2-x-12}{(x-4)^2}$ (f) $f(x) = \frac{2x^2+x-10}{x^2-5x+6}$

(g) $f(x) = x^2+2-\ln|x-2|$ (h) $f(x) = e^x x(x-1)$ (i) $f(x) = \frac{|x^2-1|}{x+2}$

101. Das Weg-Zeit-Gesetz unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes hat die Gestalt (4 Pkt.)

$$s(t) = \frac{v_0^2}{g} \ln\cosh\frac{gt}{v_0},$$

wobei $v_0 = \lim_{t\to\infty} v(t)$ die Grenzgeschwindigkeit bezeichnet. Geben Sie eine Näherungsformel für $s(t)$ für kleine Werte von t an, indem Sie $s(t)$ in eine Taylorreihe um $t = 0$ entwickeln und alle Glieder ab der 6-ten Ordnung vernachlässigen.

102. Bei einem sphärischen Hohlspiegel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius R ergibt sich für die Entfernung zwischen Brennpunkt F und Kugelmittelpunkt M: (4 Pkt.)

$$\overline{FM} = \frac{R}{2\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$$

mit $0 < \alpha < \pi/2$. Dabei ist α der Winkel zwischen dem einfallenden Strahl und dem Radius beim Einfallspunkt. Entwickeln Sie diese Funktion
(a) In eine Reihe nach Potenzen von $\sin\alpha$ bis einschließlich zu Gliedern 4. Ordnung.
(b) In eine Reihe nach Potenzen von α (im Bogenmaß) bis einschließlich zu Gliedern 4. Ordnung.
(c) Welche Näherungsformel erhält man für kleine Einfallswinkel?

103. Entwickeln Sie die folgenden Ausdrücke um den Punkt $x_0 = 0$ nach Potenzen von x bis zu Gliedern 4. Ordnung: (je 3 Pkt.)

(a) $\frac{1}{x^2-3}$ (b) $\sqrt{a^2+2x^2}$, (c) $\frac{1}{\cosh x}$ (d) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

(e) $\frac{x}{1+x^3}$ (f) $\sin(3x)\cos(2x)$ (g) $\sin x^2 \cos x$ (h) $\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$

104. Berechnen Sie näherungsweise $\ln(1,5)$ mittels der Taylorreihe für $\ln(1+x)$. (Hinweis: Brechen Sie die Taylorreihe nach 6 Gliedern ab). (3 Pkt.)

105. Bestimmen Sie $A, B \in \mathbb{R}$ derart, dass die Kurven (3 Pkt.)

$$y_1(x) = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \text{und} \quad y_2(x) = A(e^{Bx}-1)$$

in der Taylorentwicklung um $x_0 = 0$ bis zu möglichst hohen Potenzen von x übereinstimmen!

106. Welche der folgenden Behauptungen sind wahr? (Geben Sie für wahre Aussagen einen Beweis an oder verweisen Sie auf einen Satz aus der Vorlesung und geben Sie für falsche Aussagen ein Gegenbeispiel an. Achten Sie genau auf die Voraussetzungen!) (je 1 Pkt.)

(a) Jede stetige Funktion besitzt auf einem Intervall ein Extremum oder einen Wendepunkt.
(b) Jede differenzierbare Funktion hat an jeder Stelle x mit $f'(x) = 0$ ein lokales Extremum.
(c) Jede 2-mal differenzierbare Funktion hat an jeder Stelle x mit $f''(x) = 0$ einen Wendepunkt.
(d) Ein reelles Polynom n-ten Grades hat immer n reelle Nullstellen.
(e) Jedes reelle Polynom vom Grad 3 hat entweder drei reelle Nullstellen oder genau zwei echt-komplexe und eine reele Nullstelle.
(f) Ist f' stetig, so ist f zweimal differenzierbar.
(g) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ ist konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ ist nicht konvergent.
(h) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ ist konvergent.
(i) Wenn die Funktion $f(x)$ im Punkt x_0 ein Minimum annimmt, so nimmt auch $g(x) = f^2(x)$ im Punkt x_0 ein Minimum an.

(j) Wenn die Funktion $f(x)$ im Punkt x_0 ihr Minimum annimmt, so ist sie in diesem Punkt auch differenzierbar.

107. Berechnen Sie zu folgenden Potenzreihen die Konvergenzradien: (je 2 Pkt.)

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n^2}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n)^{n+1} x^n$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sqrt{(3n-2)2^n}\, x^n$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{5n+1}}{1+2^n}$

108. Lösen Sie näherungsweise mit Hilfe des Fixpunktsatzes die Gleichung (3 Pkt.)

(a) $x = 1 + \tanh x$.

(b) $x = 2 + \frac{1}{2}\cos x$.

Geben Sie 10 Iterationen an.

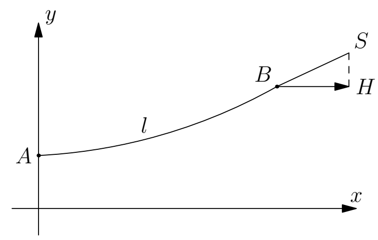
109. Bestimmen Sie auf die zweite Nachkommastelle genau: (3 Pkt.)

(a) alle komplexen Nullstellen von $f(x) = x^3 + 2x - 1$.

(b) den Bereich auf der x-Achse, in dem $\sin x + x^3 + 1 > 0$ ist.

110. Hängt ein Seil nur unter der Last seines Gewichtes G, so beschreibt es eine *Kettenlinie*:

$$y(x) = b + a\cosh\left(\frac{x+c}{a}\right), \qquad a > 0.$$



Die Spannkraft S ist in jedem Punkt des Seiles tangential gerichtet, ihre Horizontalkomponente ist über die gesamte Länge L des Seiles hinweg konstant:

$$H = aG/L.$$

(a) Man rechne nach: $y(x)$ genügt der Differentialgleichung $ay'' = \sqrt{1+y'^2}$. (3 Pkt.)

(b) Ein Seil, 100 N/m schwer, soll zwischen den Punkten A (0 m, 100 m) und B (300 m,192.8 m) hängen, sodass es in A horizontal einmündet (siehe Abbildung). Bestimme zunächst b und c. Stelle dann eine Gleichung für a auf und löse sie mit dem Newton-Verfahren. (4 Pkt.)

(c) Wie groß sind die Spannkräfte in A und B? Bestimme daraus das Gewicht G und die nötige Seillänge L. (4 Pkt.)